



2025年度 オープンキャンパス

最も「良い」答えを うまく計算するには？

—工学，情報科学，数学をつなげる研究—

塩浦昭義

東京科学大学 経営工学系 教授

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

自己紹介

1995	東京工業大	情報科学専攻	修士課程	修了
1997	東京工業大	数理・計算科学専攻	博士課程	退学
1998	東京工業大	博士(理学)		
1997-2001	上智大学	機械工学科	助手	
2001-2015	東北大	情報科学研究科	助教授(准教授)	
2015-2016	東京工業大	社会工学専攻	准教授	
2016-2020		経営工学系	准教授	
2020--			教授	

専門：経営工学にも役立つ数理とアルゴリズムの研究

今日の講義の内容

私の研究分野「**離散最適化(組合せ最適化)**」の紹介

最適化問題 とは？

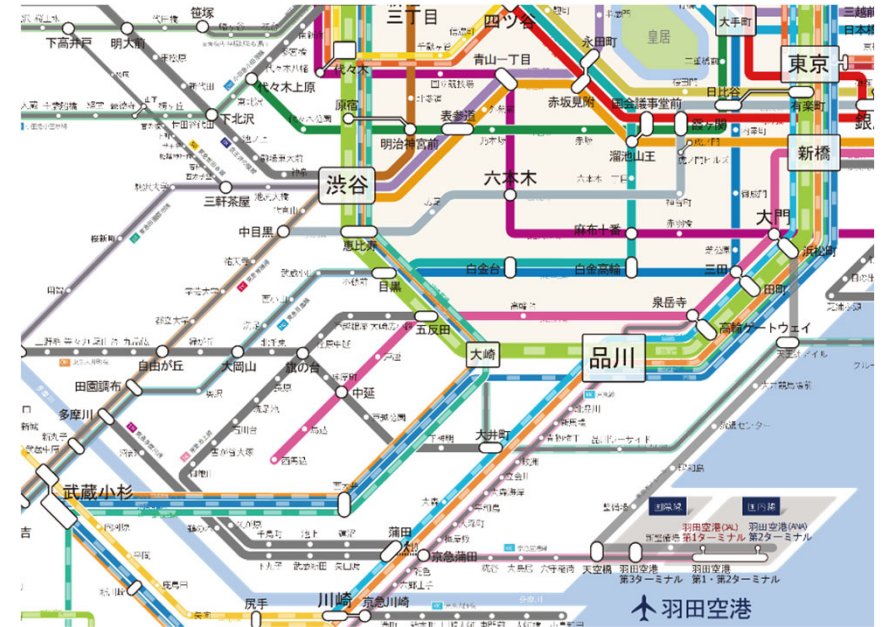
- **与えられた選択肢**の中から,

与えられた基準(評価尺度)に関して,

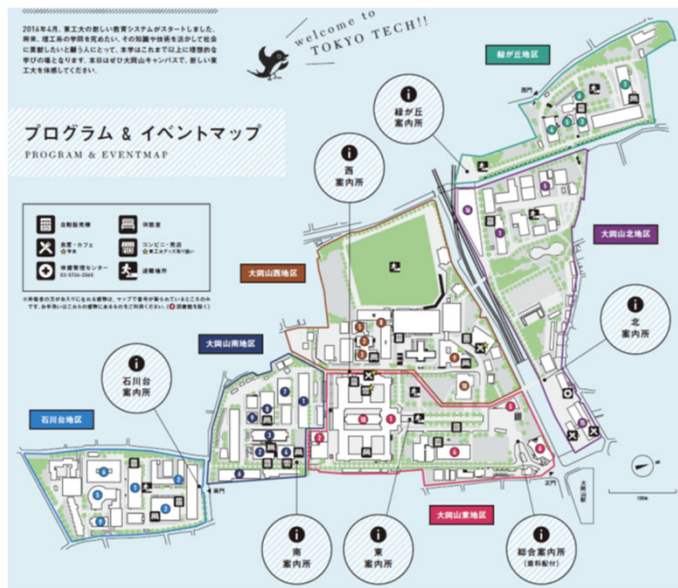
最も良い または **なるべく良い** **選択肢を**
求める問題

最適化問題の具体例

- 自宅の最寄り駅から大岡山駅までの鉄道の最短(時間)経路は？



- オープンキャンパス参加者のイベント参加計画



- 滞在時間300分の予定:
どのイベントに参加すると, 最も満足?
- 訪問箇所を6地点に決定
→ どの順番で訪問すると, 歩く距離が最小?

具体例の共通点

- 選択肢は、バラバラな「もの」の組合せ

離散最適化問題と呼ぶ

- 幾つかの選択肢の中から、
ある基準に関して最も「良い」ものを求めたい

- 自宅の最寄り駅から大岡山駅までの
鉄道の最短(時間)経路は？

- 選択肢: 路線の組合せ
- 基準: 時間 → 最小に

- 滞在時間300分: どのイベントに参加すると、最も満足？

- 選択肢: 参加するイベント
- 基準: 参加イベントの満足度 → 最大に

- 訪問箇所を6地点に決定

→ どの順番で訪問すると、歩く距離が最小？

- 選択肢: 訪問の順番
- 基準: 総移動距離 → 最小に

離散最適化問題

- 選択肢は、バラバラな「もの」の組合せ
整数値で与えられることも
- 幾つかの選択肢(解)の中から,
ある基準に関して最も「良い」ものを求める

「良い」選択肢を
具体的に計算
することが必要

- 離散最適化 --- 離散最適化問題に関する研究分野
とくに, 問題を解く手順(アルゴリズム)について研究

(離散)最適化は様々な場面で役立つ

- すべての人・ものは、常に「最適化」している！
- 経営工学
 - 製品の生産計画の効率化 --- コスト最小化, 期間最小化
 - 投資の効率化 --- 最も確実に, 利益を最大化
- 経済学
 - オークションにおける品物の配分
- 工学
 - 機械: 自動車の動きを希望通りに制御
 - 電気電子: LSI設計 - 消費電力最小, 面積最小, 計算速度最大...
 - 建築: 高層タワーのデザイン: 頑丈な構造に
- 情報科学・情報工学
 - 検索キーワードに合う文書を見つける
 - 画像を綺麗に処理する・加工する

離散最適化問題を解くのは簡単？

- 離散最適化問題の選択枝(解)は**有限個** → 有限時間で解ける
- 例1: どのイベントに参加すると, 最も満足するか?
 - イベント会場: 約100か所 → 組合せは $2^{100} \doteq 1.27 \times 10^{30}$ 通り
- 例2: 10箇所をどの順番で訪問すると, 歩く距離が最小?
 - 10か所を訪問する順番: $10! \doteq 3,628,800$ 通り

訪問地点数 n	訪問する順番 $n!$
10	3,628,800
20	2.4×10^{18}
30	2.7×10^{32}

スーパーコンピュータ
を使っても
10億年以上必要！

→ **最も良い選択枝(最適解)を見つけるのは難しい！**

- 人間の力だけではとても大変
- コンピュータを使っても限界がある

ここまでのまとめ

離散最適化問題とは

- 選択肢(解)はバラバラなものの組合せ
- 与えられた基準の下でもっとも「良い」選択肢(最適解)を選ぶ

離散最適化問題は現実社会でしばしば現れる

→ 「良い」選択肢を具体的に計算することが必要

単純な計算方法では、膨大な計算時間が必要になる

→ 短時間で解くための上手な計算方法が必要

→ 研究者の出番！

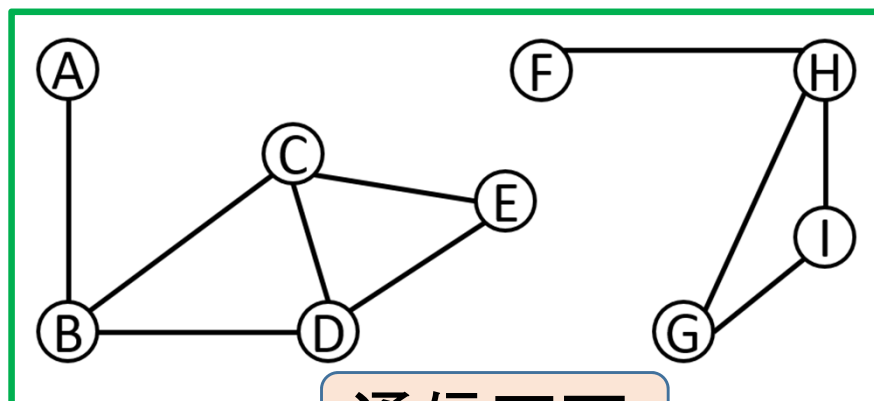
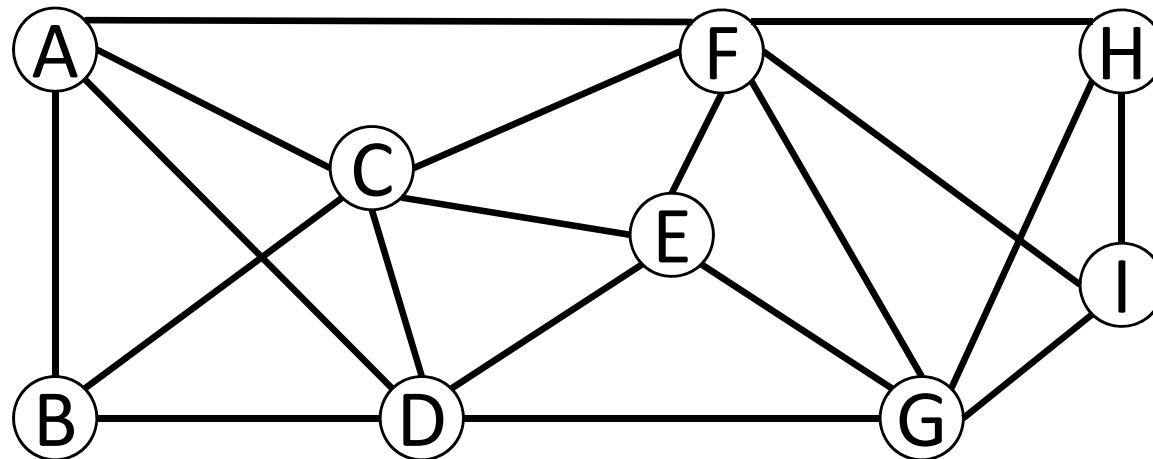
離散最適化問題の解き方

最小全域木問題の場合

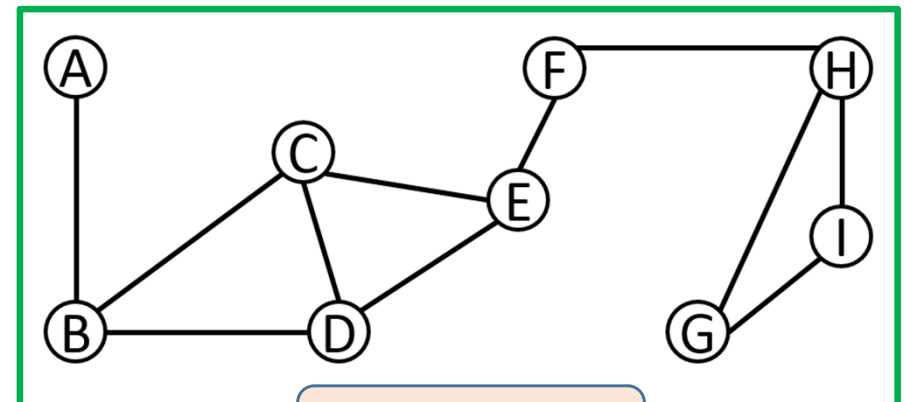
通信ネットワークの構築

- 大学内の通信用ネットワークを構築したい
 - 地点 A, B, ..., I をケーブルで接続, 互いに通信したい
 - 直接ケーブルで接続できるところ, できないところがある
 - 複数のケーブルでつながっていても可

接続可能な
地点



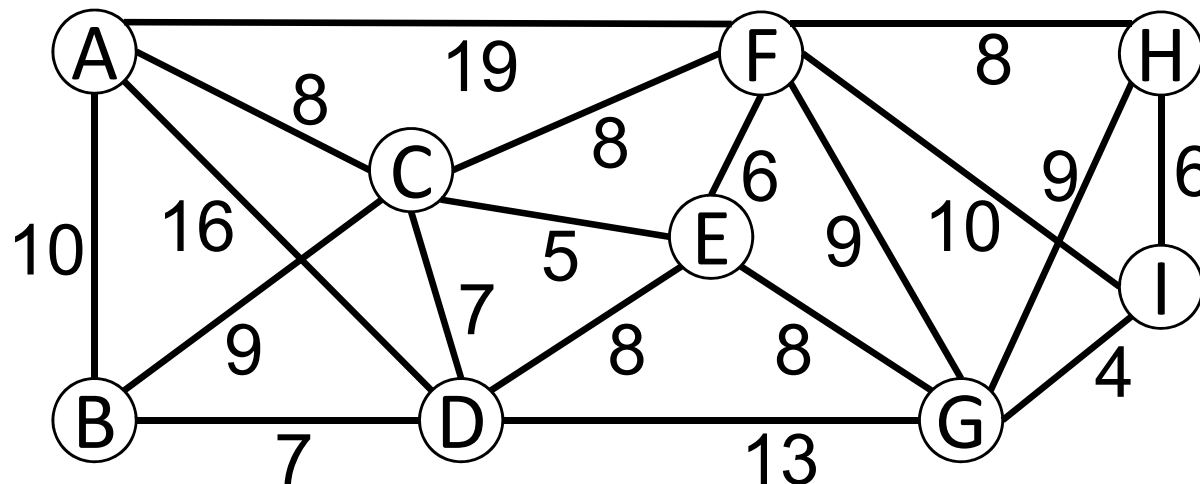
通信不可



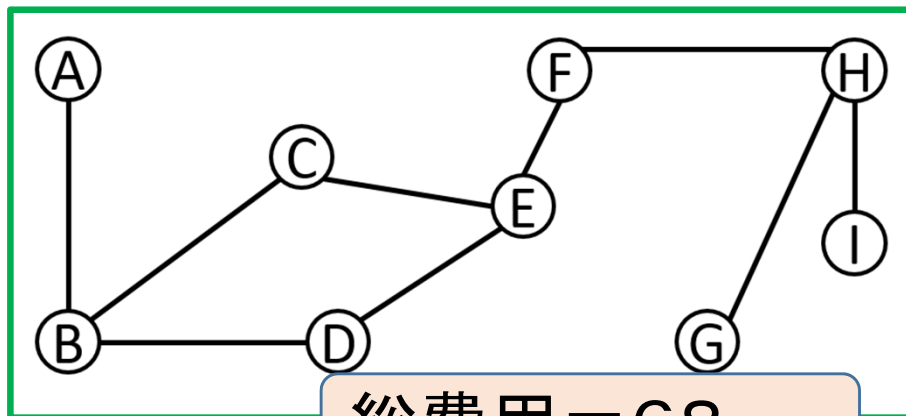
通信可能

最小全域木問題

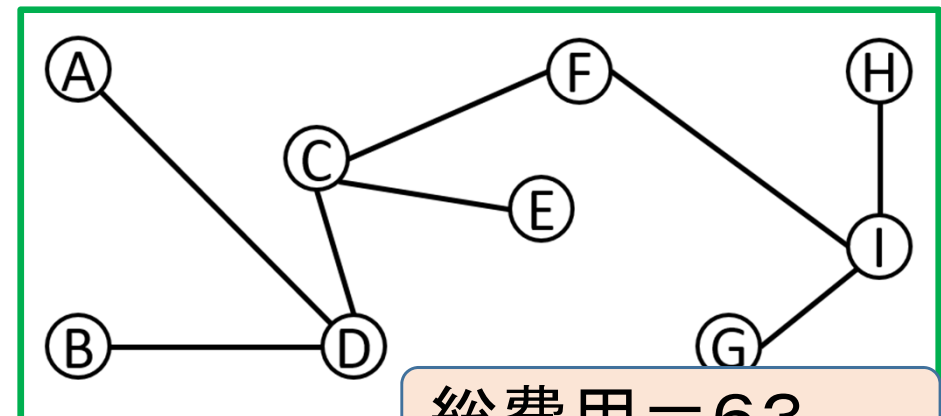
- 大学内の通信用ネットワークを構築したい
 - 各ケーブルの設置には費用が必要
 - 通信可能なネットワークを, 出来るだけ少ない総費用でつくりたい
- ➔ 費用最小のネットワークを求める問題(最小全域木問題)



各ケーブル
の設置費用

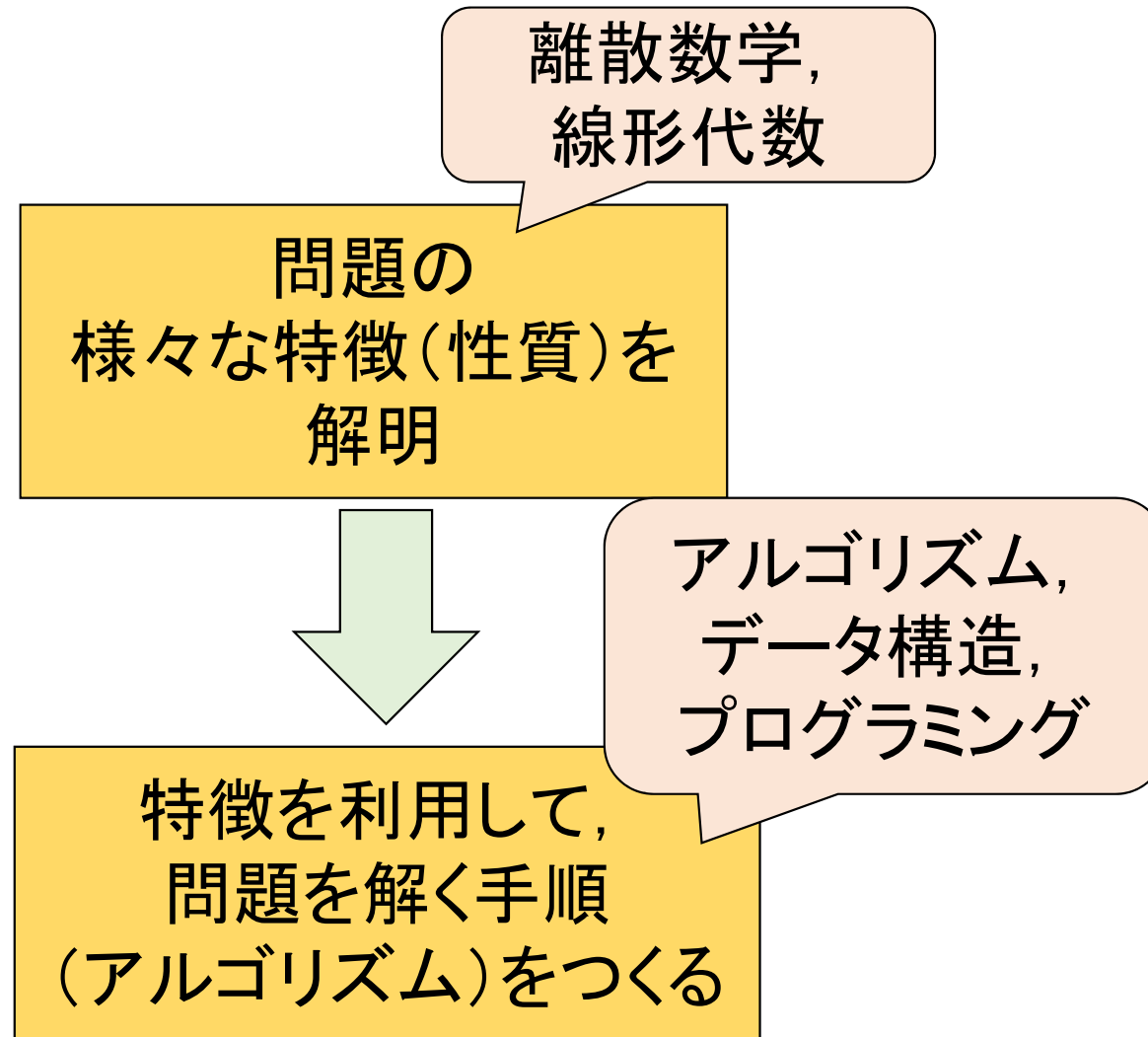


総費用=68



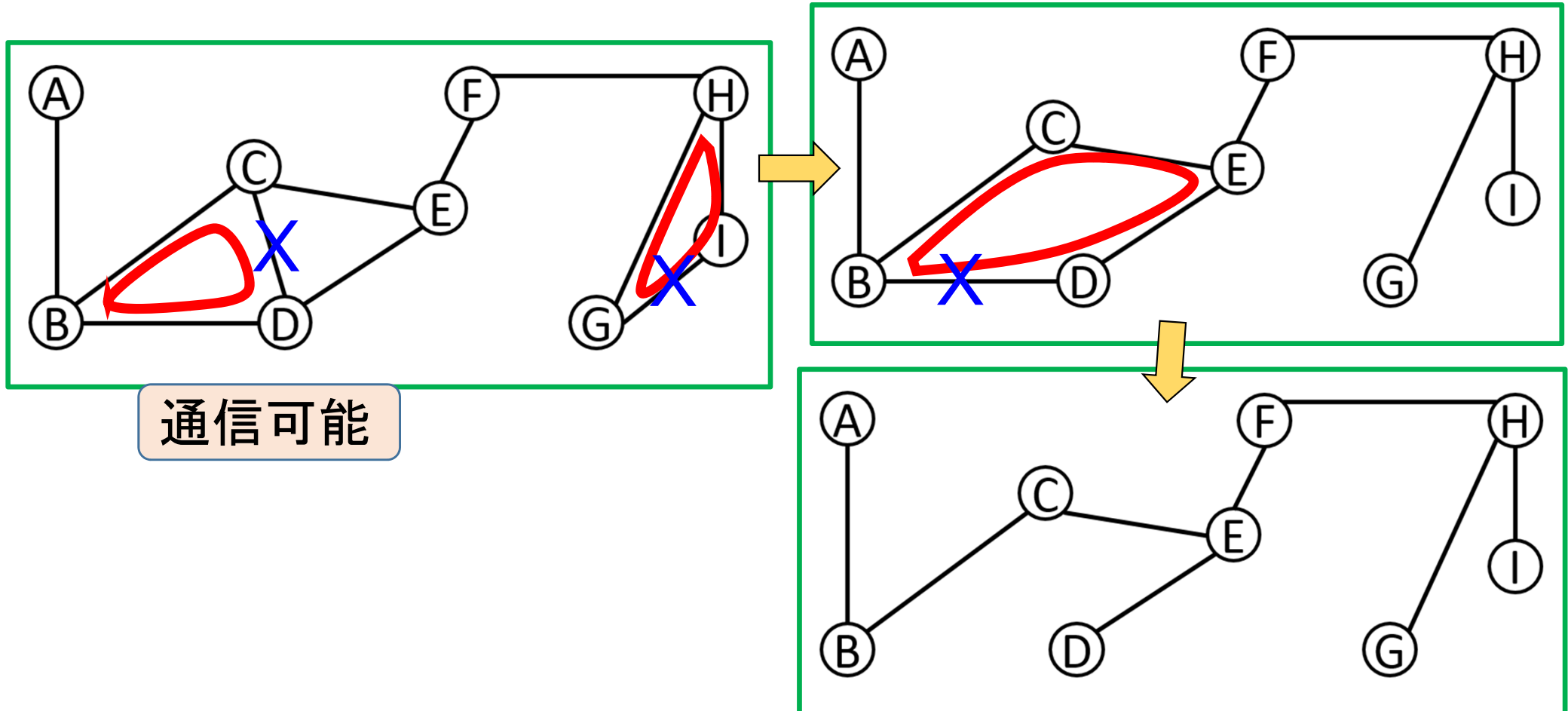
総費用=63

離散最適化問題を解くときの流れ



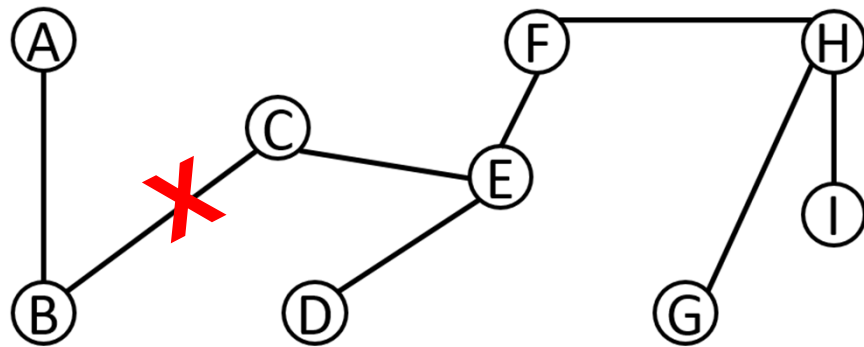
性質1: 無駄なケーブル

- 通信できればOK
 - 無駄なケーブルはできる限り省く
 - ケーブルで一周できる → 周上の各地点に2系統の通信路
→ ケーブルをひとつ削除しても通信可

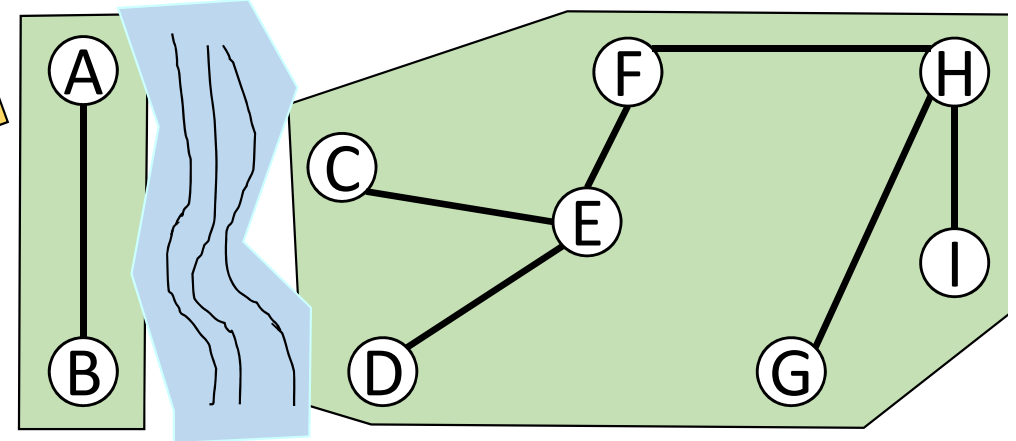


性質2: ケーブルの入れ替え可能性

- 無駄のないネットワークから ケーブルをひとつ削除 → 通信不可に
- 別のケーブルをうまく選んで追加 → 再び通信可能に！

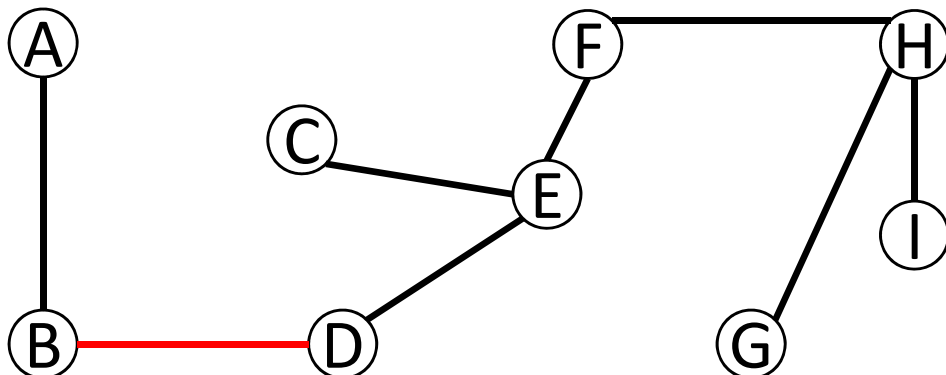


無駄のないネットワーク



ケーブル削除

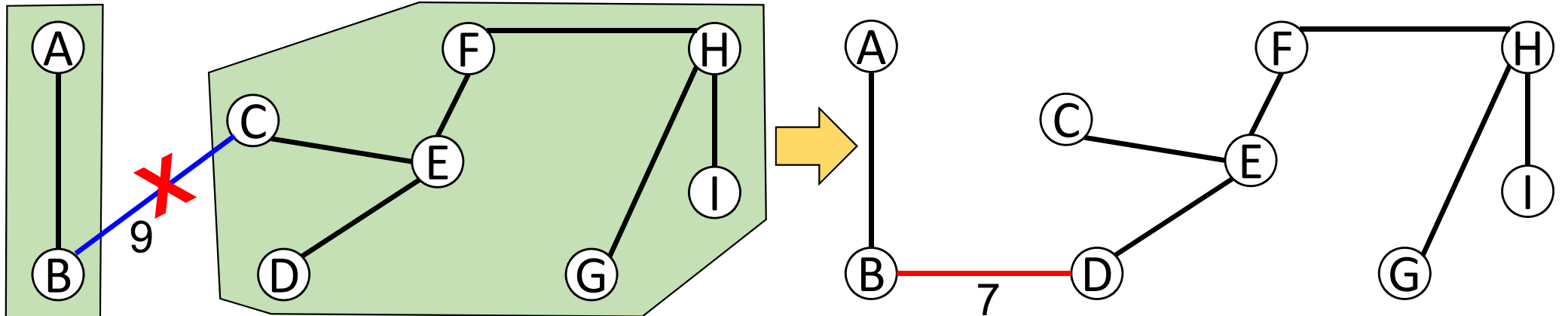
→ ネットワークは2つに分断



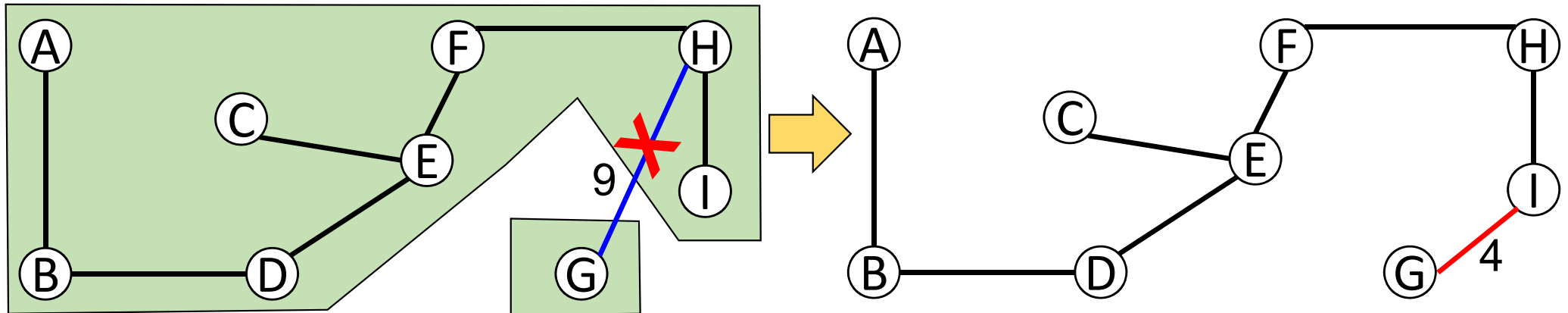
2つをつなぐケーブル1つを追加 → 通信可能に

アルゴリズム1: ケーブルを繰り返し交換

- 性質2により, ケーブルの交換が可能
- 交換して総費用を繰り返し削減 → 最小費用のネットワーク



総費用 2 減少

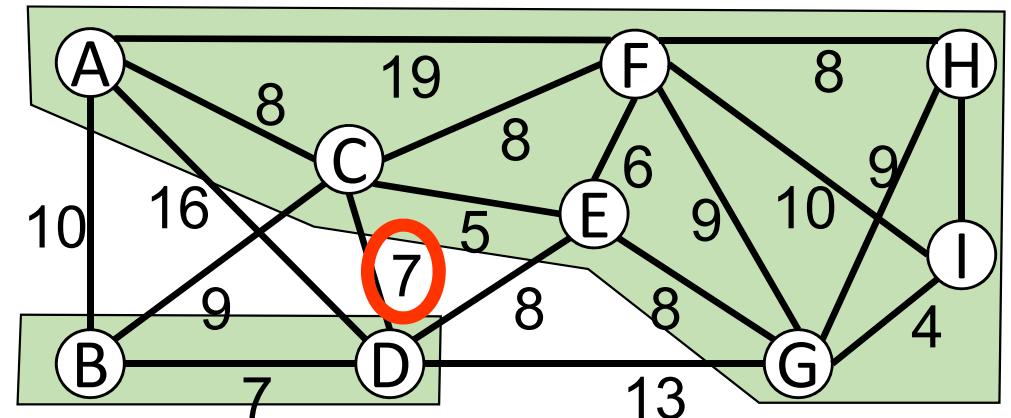
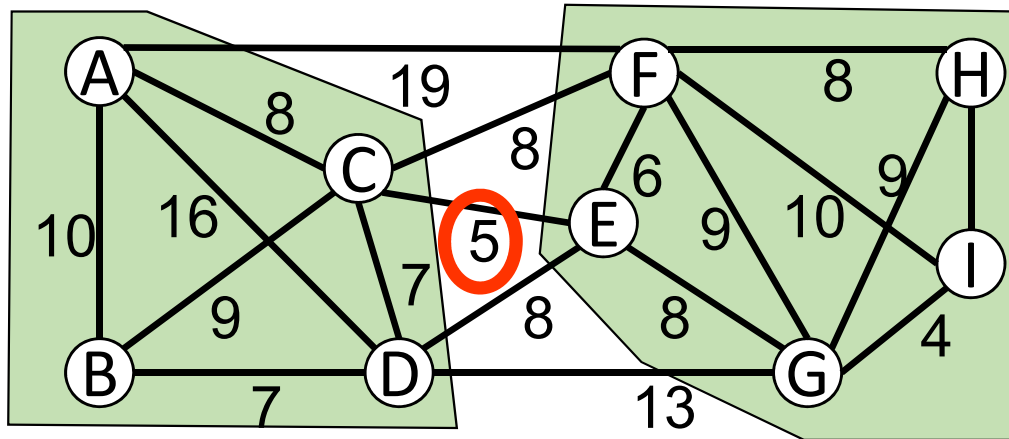


総費用 5 減少

- 有限回の繰り返しで終了. しかし, 繰り返し回数が大きくなる可能性

性質3: 追加すべきケーブルの検出

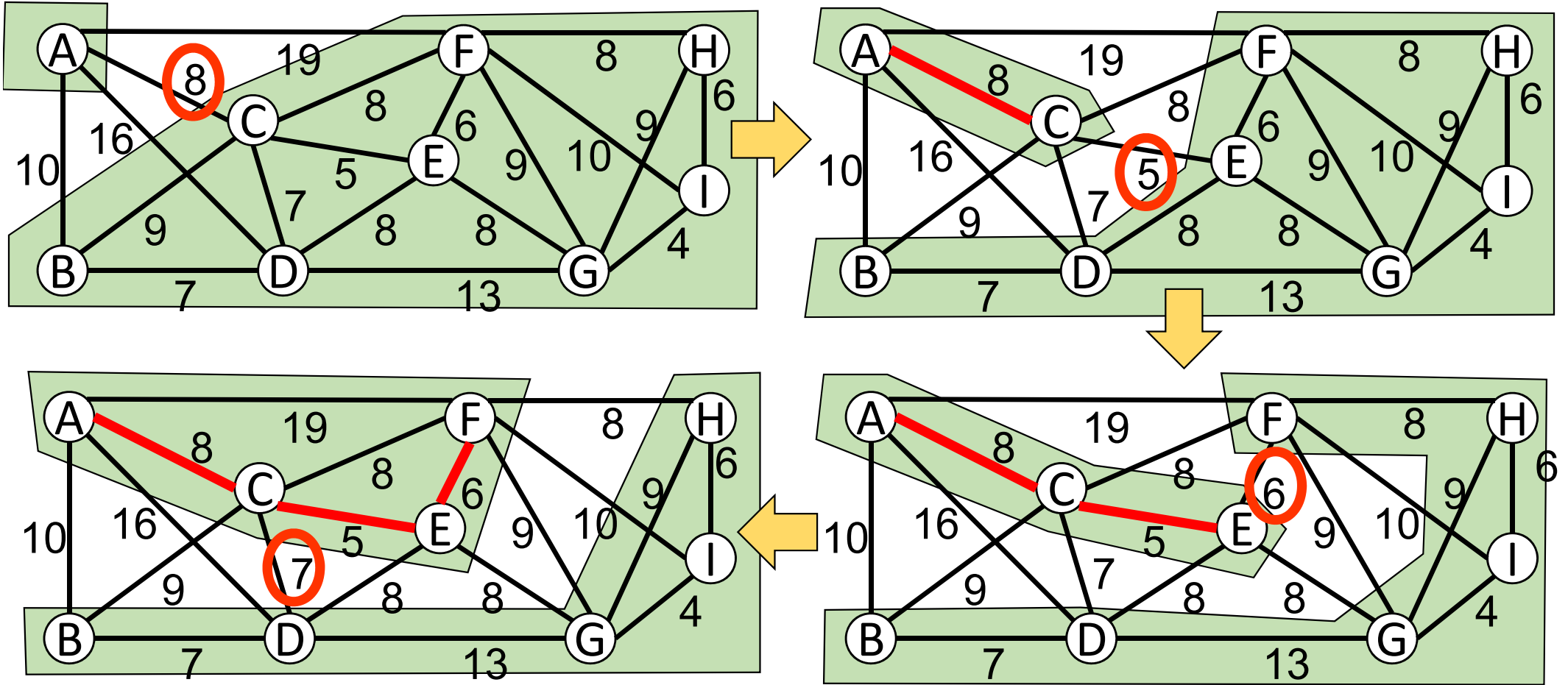
- 費用最小のネットワークに必ず入るケーブルの検出が可能！



- ネットワーク上の地点の二分割を自由に選ぶ
 ➔ 二分割をつなぐ**費用最小のケーブル**は、
 必ず費用最小ネットワークに含まれる
- 分割方法をいろいろ変える
 ➔ 費用最小ネットワークに含まれるケーブルがすべて見つかる！

アルゴリズム2: 安いケーブルを順に追加

- 性質3を利用, 最小費用ネットワークに含まれるケーブルを検出
- 木が成長するように, ケーブルを繰り返し追加



• (地点の数) - 1 回の繰り返しで終了

地点の数が大きくても,
短時間で計算終了!

アルゴリズムをつくる上で大事なこと

- 紹介したアルゴリズム自体は, 誰でも思いつきそう
 - でも, 「最適解を必ず求める」保証はできるか?
- 性能保証のないアルゴリズムは, 安心して使えない
 - 「ほとんどの場合, うまいきそう」では駄目なことも
← ユーザからの信用が得られない
- 紹介したアルゴリズム: 数学的な性質を利用して構築
 - 最適解を必ず求める証明付き ← 数学による100%の保証
 - 誰にでもできるわけではない → **研究者の役割**

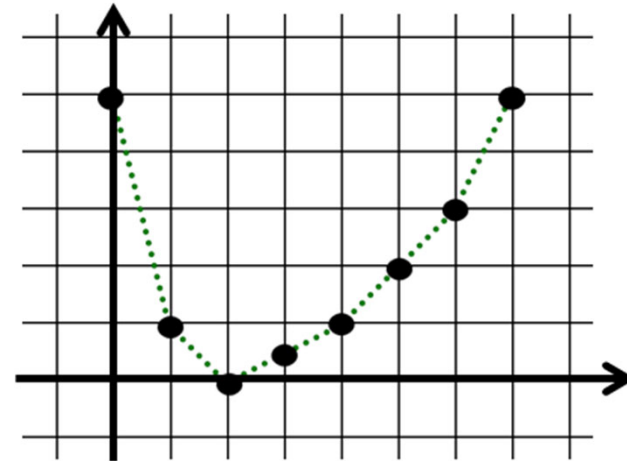
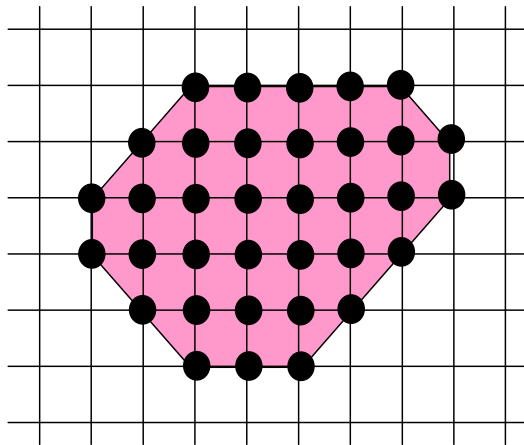
おわりに

講師の研究テーマ

- 世の中には数多くの離散最適化問題が存在する
 - 時代の流れと共に, 新しい問題を解く必要性
 - デジタル画像の処理
 - 携帯電話での通信
 - Web 広告の適切な掲載
 - 人工知能(AI), など
- より複雑な離散最適化問題
 - 先ほどの問題例: 評価尺度が「足し算」で表される
費用の和, 所要時間の和, 満足度の和, . . .
 - 最近の問題例: 評価尺度が「足し算」で表現できない
例: 参加イベントの組合せ
ダブルスの良いペアの組合せ

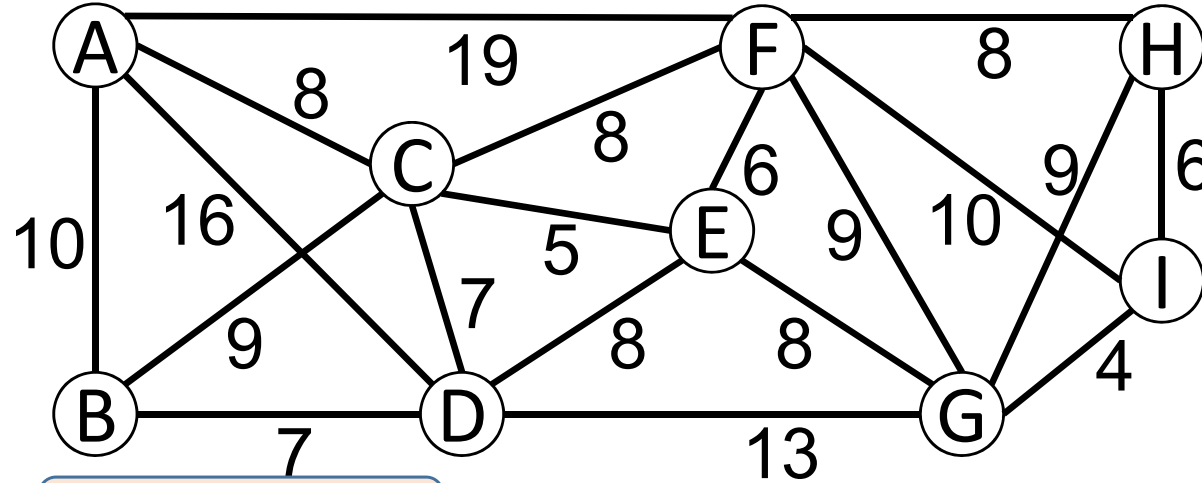
講師の研究テーマ

- どのような問題ならば, 「うまい」解法が存在するのか?
 - 選択枝の全体(解の集合), および評価尺度の構造を解析
 - 「解きやすい」問題に共通する構造を明らかに
 - キーワード: 離散凸



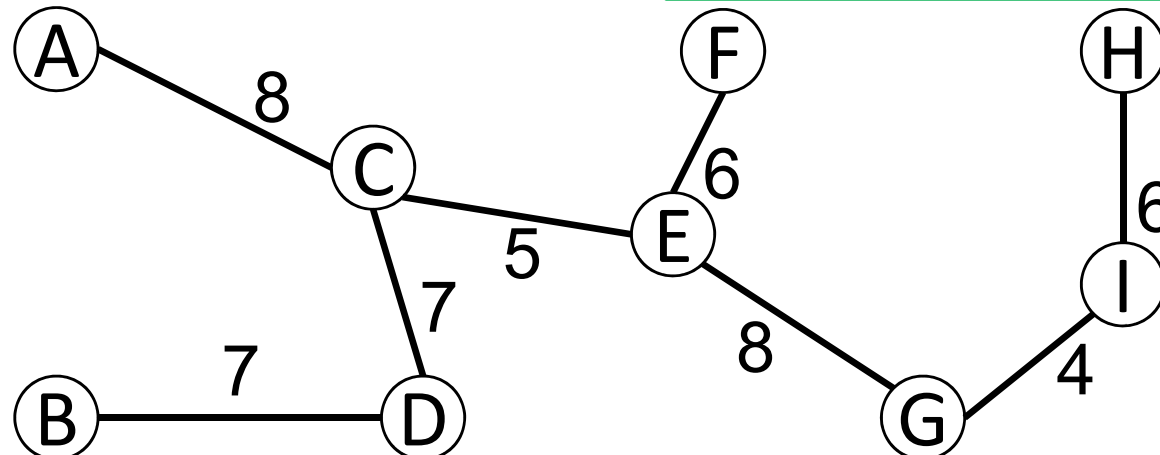
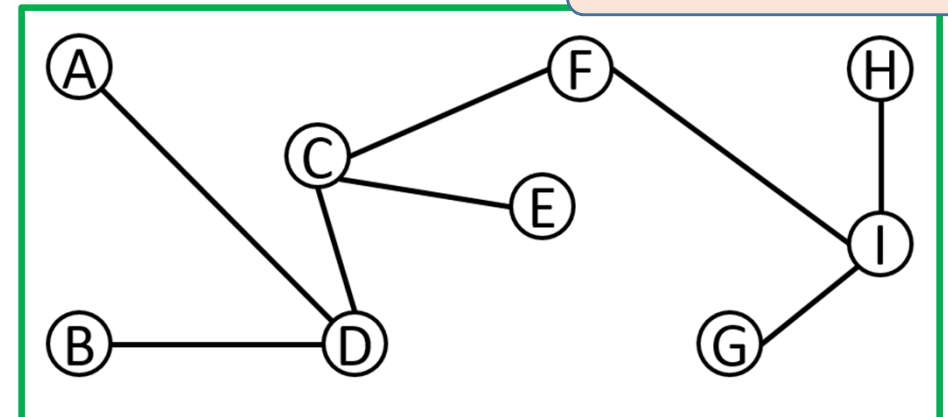
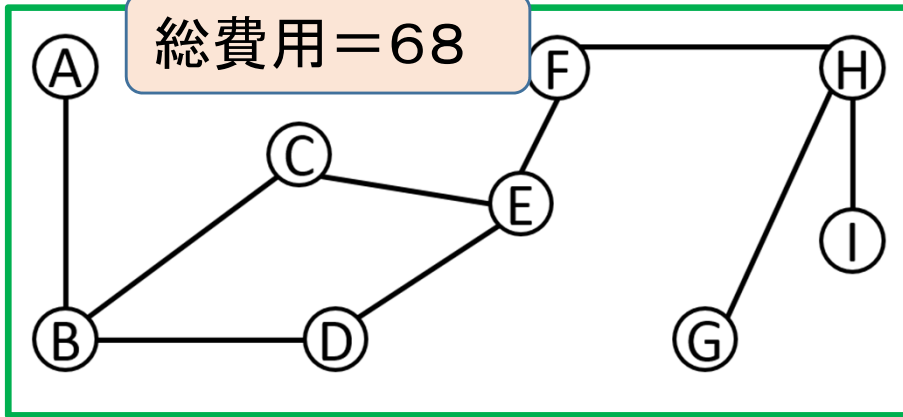
最小全域木問題

各ケーブル
の設置費用



総費用=63

総費用=68

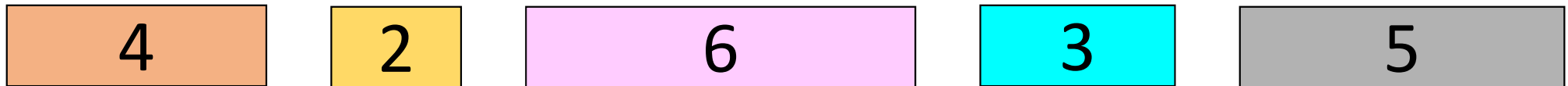


最小の
総費用=51

クイズ

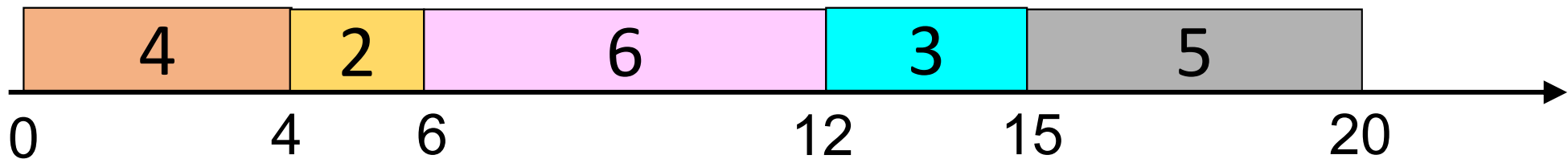
ある銀行の窓口にて、数名の顧客の対応をする予定である。
各顧客の所要時間は既知とする。

(1) どのような順番で対応すると、総完了時間が最小になるか？



四角は顧客を表し、数字は所要時間を表す

例：このままの順番で対応した場合



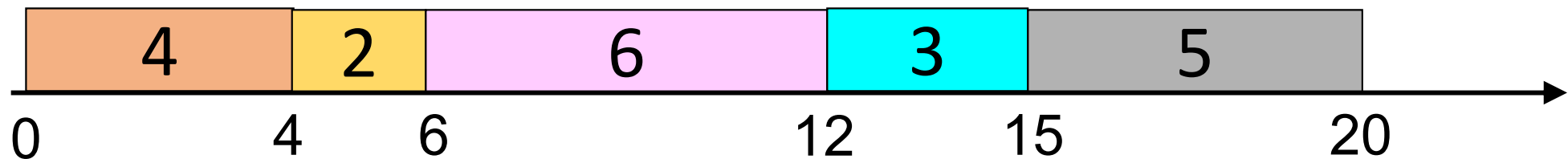
$$\text{総完了時間} = 4 + 6 + 12 + 15 + 20 = 57$$

(2) 2つの窓口で対応する場合、各窓口でどの順番で対応すると、総完了時間が最小になるか？

(3) 2つの窓口で対応する場合、最後の顧客が完了する時間を最小にするには、各窓口でどの順番で対応すれば良いか？

クイズの答え

(1) どのような順番で対応すると、総完了時間が最小になるか？



総完了時間

$$= 4 + 6 + 12 + 15 + 20$$

$$= 4 + (4+2) + (4+2+6) + (4+2+6+3) + (4+2+6+3+5)$$

$$= 4 \times 5 + 2 \times 4 + 6 \times 3 + 3 \times 2 + 5 \times 1$$

最初の顧客の時間は5回加算される,

2番目の顧客は4回加算される, . . .

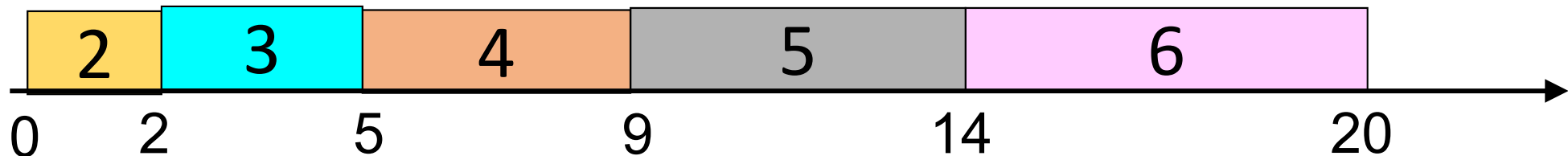
クイズの答え

(1) どのような順番で対応すると、総完了時間が最小になるか？



総完了時間＝最初の顧客の時間×5
 +2番目の顧客の時間×4 + ... +最後の顧客の時間×1

∴所要時間の短い顧客から対応した方がよい！



総完了時間
 $= 2 \times 5 + 3 \times 4 + 4 \times 3 + 5 \times 2 + 6 \times 1 = 50$

クイズの答え

(1) どのような順番で対応すると、総完了時間が最小になるか？



総完了時間＝最初の顧客の時間×5
+2番目の顧客の時間×4 + ... +最後の顧客の時間×1

より一般的な問題：

2つの数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ が与えられたとする.

ただし, $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ である.

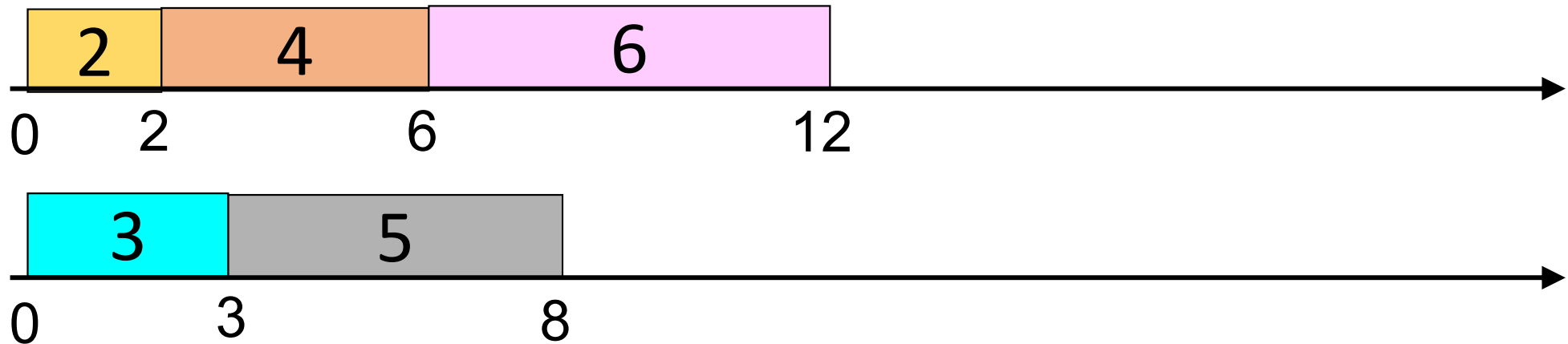
このとき, $b_1, b_2, \dots, b_n$ を並び替えて得られる数列 $b'_1, b'_2, \dots, b'_n$ により定まる値 $\sum_{i=1}^n a_i \times b'_i$ を考える.

この値を最小にするには, 数列 $b'_1, b'_2, \dots, b'_n$ をどのように選べば良いか？

答え: $b_1, b_2, \dots, b_n$ を, 値の小さい方から順に並べる

クイズの答え

(2) 2つの窓口で対応する場合、各窓口でどの順番で対応すると、総完了時間が最小になるか？



総完了時間

$$= 2 \times 3 + 3 \times 2 + 4 \times 2 + 5 \times 1 + 6 \times 1 = 31$$

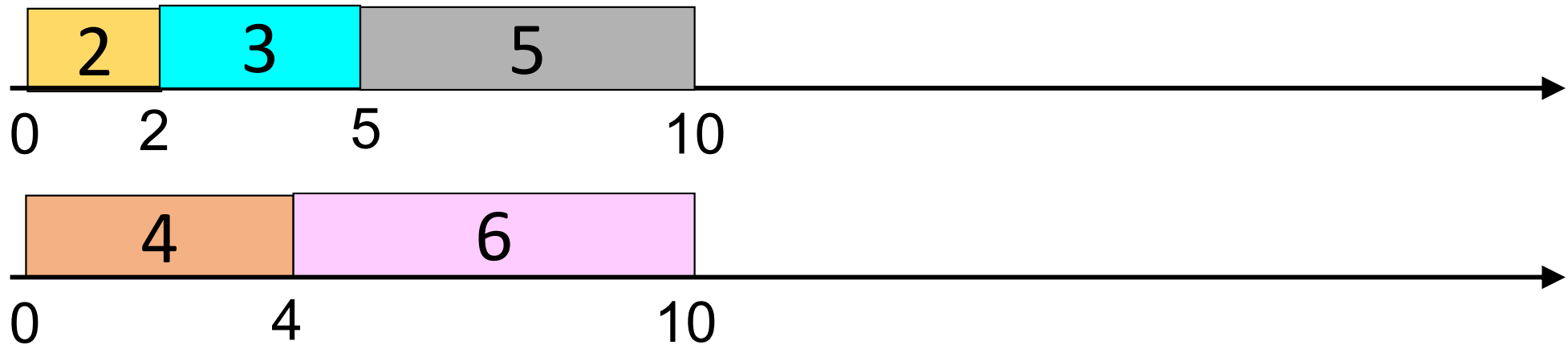
他にも最適なスケジュールが存在する

ただし、

- 所要時間2の顧客は、顧客数3名の窓口割り当て
- 所要時間3および4の顧客は、別々の窓口の最後から2番目の顧客にする
- 所要時間5および6の顧客は、別々の窓口の最後の顧客にする

クイズの答え

(3) 2つの窓口で対応する場合、最後の顧客が完了する時間を最小にするには、各窓口でどの順番で対応すれば良いか？



最後の顧客の完了時間 = 10

総完了時間も最小

$$= 2 \times 3 + 3 \times 2 + 4 \times 2 + 5 \times 1 + 6 \times 1 = 31$$