問1：右の線形計画問題の基底解をすべて計算せよ．また，対応する基底変数，非基底変数の組合せを書け．

$$x_3 = 12 - 3x_1 - 2x_2$$
$$x_4 = 12 - x_1 \quad - 2x_2$$

等式 m = 2 個，変数 n = 4 個

➔ ${}_4C_2 = 4x3/2 = 6$ 個の基底解

基底x_1, x_2 非基底 x_3, x_4: (0,6,0,0)

基底x_1, x_3 非基底 x_2, x_4: (12,0,−24,0)

基底x_1, x_4 非基底 x_2, x_3: (4,0,0,8)

基底x_2, x_3 非基底 x_1, x_4: (0,6,0,0)

基底x_2, x_4 非基底 x_1, x_3: (0,6,0,0)

基底x_3, x_4 非基底 x_1, x_2: (0,0,12,12)

$$x_1 = 12 - 2x_2 - x_4$$
$$x_3 = -24 + 4x_2 + 3x_2$$

$$x_3 = -2x_1 + x_4 \; x_2 =$$
$$6 - 1/2x_1 - 1/2x_2$$

$$x_3 = 12 - 3x_1 - 2x_2$$
$$x_4 = 12 - x_1 \quad - 2x_2$$

問2：右の線形計画問題について考える
①x_1, x_2が基底変数の場合
②x_1, x_4が基底変数の場合
それぞれの場合に対し，対応する基底解が最適解か否かを判定せよ．授業で説明したやり方で判定すること．

$$
\begin{aligned}
z &= - x_1 - x_2 \\
x_3 &= 12 - 3x_1 - 2x_2 \\
x_4 &= \mathbf{8} - x_1 - 2x_2
\end{aligned}
$$

①x_1, x_2が基底変数となるように，辞書を書き換える

$$
\begin{aligned}
z &= -5 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \\
x_1 &= 2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\
x_2 &= 3 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4
\end{aligned}
$$

基底解は実行可能であり，zの式の各非基底変数の係数がすべて非負であるので，最適解である．

②x_1, x_4が基底変数となるように，辞書を書き換える

$$
\begin{aligned}
z &= -4 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\
x_1 &= 4 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \\
x_4 &= 4 - \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3
\end{aligned}
$$

基底解は実行可能だが，zの式の非基底変数x_2の係数が負であるので，最適解とは限らない．

問3：右のLP（許容辞書）を単体法により解きなさい．

単体法の各反復における辞書，および基底から出る変数，入る変数を明記すること

$$
\begin{aligned}
z &= 0 - 5x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\
x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3
\end{aligned}
$$

z の式の非基底変数x_1の係数が負なので，
基底に入る変数をx_1とする．
➔基底から出る変数はx_4となる．
辞書を書き換える

$$
\begin{aligned}
z &= -\frac{25}{2} + \frac{5}{2}x_4 + \frac{7}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\
x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\
x_5 &= 1 + 2x_4 + 5x_2 \\
x_6 &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3
\end{aligned}
$$

z の式の非基底変数x_3の係数が負なので，
基底に入る変数をx_3とする．
➔基底から出る変数はx_6となる．
辞書を書き換える

$$z = -13 + x_4 + 3x_2 + x_6$$
$$x_1 = 2 - 2x_4 - 2x_2 + x_6$$
$$x_5 = 1 + 2x_4 + 5x_2$$
$$x_3 = 1 + 3x_4 + x_2 - 2x_6$$

z の式の非基底変数の
係数が非負なので,
現在の基底解は最適解
∴最適解は $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0$

単体法の答えを確かめる方法：目的関数値が一致する双対問題の許容解を作ればよい

（0）得られた解が主問題の許容解であることを確認

（1）元の問題の双対問題をつくる

例：前回の授業で使った答え$(x_1, x_2, x_3) = (0,5/3,0)$（最適値＝-20/3）が最適かどうか？

$$z = 0 - 5x_1 - 4x_2 - 3x_3$$
$$x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3$$
$$x_5 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$$
$$x_6 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3$$

⇒

最小化 $-5x_1 - 4x_2 - 3x_3$

条件 $-2x_1 - 3x_2 - x_3 \geq -5$

$-4x_1 - x_2 - 2x_3 \geq -11$

$-3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \geq -8$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$(x_1, x_2, x_3) = (0,5/3,0)$ は許容解

双対問題

最大化：$-5y_1 - 11y_2 - 8y_3$

条件：$-2y_1 - 4y_2 - 3y_3 \leq -5$

$-3y_1 - y_2 - 4y_3 \leq -4$

$-y_1 - 2y_2 - 2y_3 \leq -3$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

単体法の答えを確かめる方法

（２）相補性条件を書く

（３）得られた主問題の解に対して，相補性条件を満たす双対問題の許容解を計算

最小化 $-5x_1 - 4x_2 - 3x_3$

条件 $-2x_1 - 3x_2 - x_3 \geq -5$

$-4x_1 - x_2 - 2x_3 \geq -11$

$-3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \geq -8$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

最大化：$-5y_1 - 11y_2 - 8y_3$

条件：$-2y_1 - 4y_2 - 3y_3 \leq -5$

$-3y_1 - y_2 - 4y_3 \leq -4$

$-y_1 - 2y_2 - 2y_3 \leq -3$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

相補性条件

$(5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3)y_1 = 0$

$(11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3)y_2 = 0$

$(8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3)y_3 = 0$

$(5 - 2y_1 - 4y_2 - 3y_3)x_1 = 0$

$(4 - 3y_1 - y_2 - 4y_3)x_2 = 0$

$(3 - y_1 - 2y_2 - 2y_3)x_3 = 0$

単体法の答えを確かめる方法

（２）相補性条件を書く

（３）得られた主問題の解に対して，相補性条件を満たす双対問題の許容解を計算

相補性条件に$(x_1, x_2, x_3) = (0,5/3,0)$ を代入

$$0 \cdot y_1 = 0$$
$$({}^{28}/_{3})\ y_2 = 0$$
$$({}^{4}/_{3})y_3 = 0$$

$$(5 - 2y_1 - 4y_2 - 3y_3)0 = 0$$
$$(4 - 3y_1 - y_2 - 4y_3)({}^{5}/_{3}) = 0$$
$$(3 - y_1 - 2y_2 - 2y_3)0 = 0$$

➔$y_1 = y_3 = 0, y_2 = 4$が得られるが，これは双対問題の許容解

目的関数値＝－44≠－20/3

よって$(x_1, x_2, x_3) = (0,5/3,0)$

は主問題の最適解ではない

最大化：$-5y_1 - 11y_2 - 8y_3$

条件：$-2y_1 - 4y_2 - 3y_3 \le -5$

$$-3y_1 - y_2 - 4y_3 \le -4$$
$$-y_1 - 2y_2 - 2y_3 \le -3$$
$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$