

問 1: $(x_1, x_2) = (1, 2)$ における二次のテイラー近似を求めなさい (\log の底は 2 とする)

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= x_1 \log_2 x_2 - x_2 \log_2 x_1 \\ &= (x_1 \log_e x_2 - x_2 \log_e x_1) / \log_e 2 \end{aligned}$$

$$\nabla f_1(x_1, x_2) = \frac{1}{\log_e 2} \begin{bmatrix} \log_e x_2 - \frac{x_2}{x_1} \\ \frac{x_1}{x_2} - \log_e x_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\log_e 2} \begin{bmatrix} \log_e 2 - 2 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$

$$Hf_1(x_1, x_2) = \frac{1}{\log_e 2} \begin{bmatrix} \frac{x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \\ \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} & -\frac{x_1}{x_2^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\log_e 2} \begin{bmatrix} 2 & -0.5 \\ -0.5 & -0.25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(1, 2) &= f_1(1, 2) + \nabla f_1(1, 2)^T \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix}^T Hf_1(1, 2) \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix} \\ &= 1 + \frac{1}{\log_e 2} \begin{bmatrix} \log_e 2 - 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2 \log_e 2} \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -0.5 \\ -0.5 & -0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

問 1: $(x_1, x_2) = (1, 2)$ における二次のテイラー近似を求めなさい

$$f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$$

$$\nabla f_2(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad Hf_2(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{f}_2(1, 2) = f_2(1, 2) + \nabla f_2(1, 2)^T \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix}^T Hf_2(2, 1) \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix}$$

$$= 4 + 2(x_1 - 1) + 4(x_2 - 2) + (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 1$$

問 1: $(x_1, x_2) = (1, 2)$ における二次のテイラー近似を求めなさい

$$f_3(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 - 2x + e^{x+y}$$

$$\nabla f_3(x, y) = \begin{bmatrix} 2x - y - 2 + e^{x+y} \\ -x + 4y + e^{x+y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + e^3 \\ 3 + e^3 \end{bmatrix},$$

$$Hf_3(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 + e^{x+y} & -1 + e^{x+y} \\ -1 + e^{x+y} & 4 + e^{x+y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + e^3 & -1 + e^3 \\ -1 + e^3 & 4 + e^3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{f}_3(1, 2) = f_3(1, 2) + \nabla f_3(1, 2)^T \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix}^T Hf_3(1, 2) \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix}$$

後はこれを計算すればよい

問2：関数 $f(x, y) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 + 2y^2$ について考える

(a) 勾配ベクトルとヘッセ行列を計算せよ.

(b) すべての停留点(勾配ベクトルがゼロの点)を求めよ.

さらに, 2次の最適性条件(十分条件)を用いて, 極小解を求めよ.

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} x^3 - x \\ y^2 + 4y \end{bmatrix}, \quad Hf(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2 - 1 & 0 \\ 0 & 2y + 4 \end{bmatrix}$$

よって停留点は

$x^3 - x = x(x + 1)(x - 1) = 0$, $y^2 + 4y = y(y + 4) = 0$ の解すべて
→停留点は $(-1, -4)$, $(-1, 0)$, $(0, -4)$, $(0, 0)$, $(1, -4)$, $(1, 0)$

これらの点でのヘッセ行列を計算すると, それぞれ

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ヘッセ行列が正定値なのは $(-1, 0)$, $(1, 0)$ のとき

これらの点は極小解である

問3：対称な 2×2 行列 A に対し、次の関係を証明せよ。

$$A \text{は半正定値} \Leftrightarrow a_{11} \geq 0, a_{22} \geq 0, a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geq 0$$

行列 A が半正定値 \Leftrightarrow 任意の $x = (x_1, x_2)$ に対して

$$x^T A x = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 \geq 0$$

$$a_{11} = 0 \text{ のとき: } x^T A x = a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2$$

これが任意の $x = (x_1, x_2)$ に対して非負となるならば、

$$a_{22} \geq 0 \text{ (}(x_1, x_2) = (1, 0) \text{ を代入すればよい),}$$

$$a_{12} = 0 \text{ (}(x_1, x_2) = (1, 0) \text{ を代入すればよい)}$$

逆に、 $a_{22} \geq 0, a_{12} = 0$ ならば、

$$a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 = a_{22}x_2^2 \geq 0 \text{ 成立}$$

問3：対称な 2×2 行列 A に対し、次の関係を証明せよ。

$$A \text{は半正定値} \Leftrightarrow a_{11} \geq 0, a_{22} \geq 0, a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geq 0$$

[←の証明]

行列 A が半正定値 \Leftrightarrow 任意の $x = (x_1, x_2)$ に対して

$$x^T Ax = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 \geq 0$$

• $a_{11} \neq 0$ のとき:

$$x^T Ax = a_{11} \left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 \right)^2 + \frac{1}{a_{11}} (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) x_2^2$$

$\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 \right)^2, x_2^2$ は常に非負であり,

$a_{11} \geq 0, a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geq 0$ が成り立つので, $x^T Ax \geq 0$ が成立

• $a_{22} \neq 0$ のとき: 上と同様にして証明できる.

• $a_{11} = a_{22} = 0$ のとき: $x^T Ax = 2a_{12}x_1x_2$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = a_{12}^2 \geq 0 \text{ より } a_{12} = 0$$

よって $x^T Ax = 0$ が成立

問3：対称な 2×2 行列 A に対し、次の関係を証明せよ。

$$A \text{は半正定値} \Leftrightarrow a_{11} \geq 0, a_{22} \geq 0, a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geq 0$$

[\rightarrow の証明]

行列 A が半正定値 \Leftrightarrow 任意の $x = (x_1, x_2)$ に対して

$$x^T Ax = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 \geq 0$$

- $(x_1, x_2) = (1, 0)$ を代入: $x^T Ax = a_{11} \geq 0$ 成立
- $(x_1, x_2) = (0, 1)$ を代入: $x^T Ax = a_{22} \geq 0$ 成立
- $a_{11} > 0$ のとき, $(x_1, x_2) = (a_{12}, -a_{11})$ を代入:
 $x^T Ax = a_{11}a_{12}^2 + a_{22}a_{11}^2 - 2a_{11}a_{12}^2 = a_{11}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \geq 0$
よって $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geq 0$ が成立.
- $a_{22} > 0$ のとき, $(x_1, x_2) = (-a_{22}, a_{12})$ を代入:
 $x^T Ax = a_{11}a_{22}^2 + a_{22}a_{12}^2 - 2a_{22}a_{12}^2 = a_{22}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \geq 0$
よって $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geq 0$ が成立.
- $a_{11} = a_{22} = 0$ のとき, $(x_1, x_2) = (1, \pm 1)$ を代入:
 $x^T Ax = \pm 2a_{12} \geq 0$ より $a_{12} = 0$
よって $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ が成立.