最適化基礎
第10回

増加路アルゴリズムの正当性
最大フロー最小カット定理
最小費用流問題

塩浦昭義
東京工業大学 社会工学専攻 准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp
http://www.soc.titech.ac.jp/~shioura/teaching

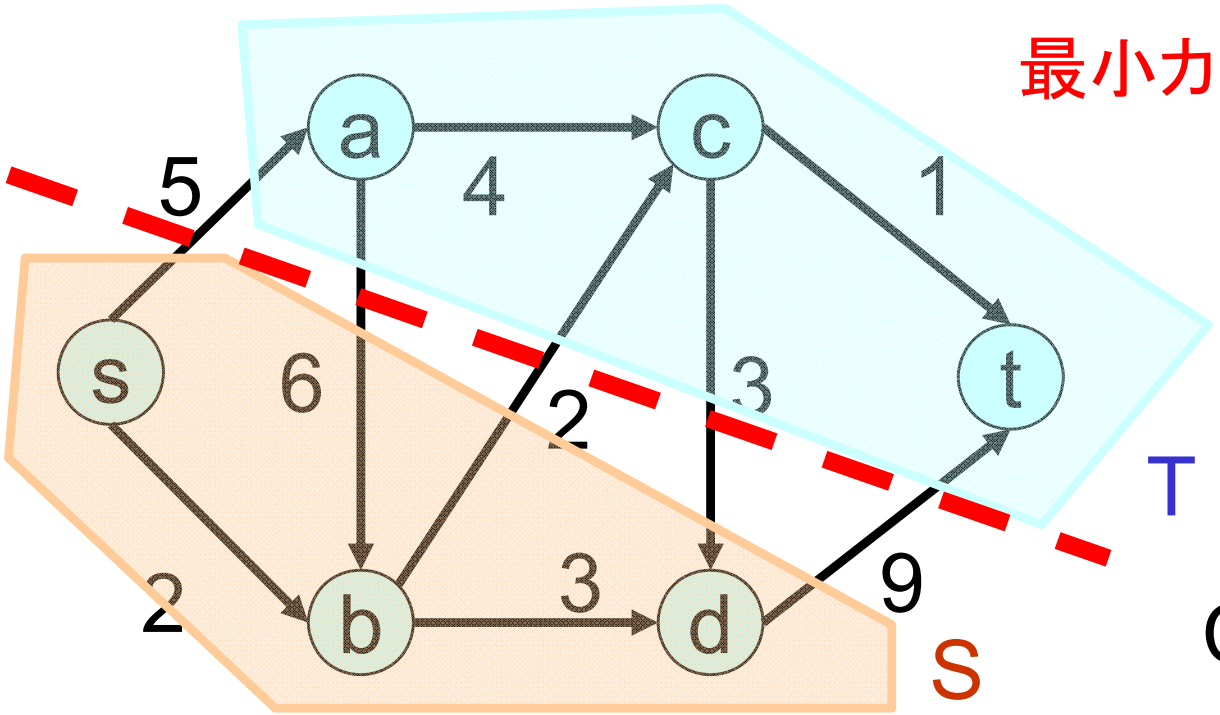
カット

フローを流すとき，ネットワークのボトルネックはどこ？

カット (S, T): S, T は頂点集合Vの分割($S \cap T = \emptyset, S \cup T = V$)
S はソース s を含む，Tはシンク t を含む

カット (S, T) の容量C(S,T) ＝ SからTへ向かう枝の容量の和

最小カット：容量が最小のカット



C(S,T)=5+2+9=16

カットの性質（その1）

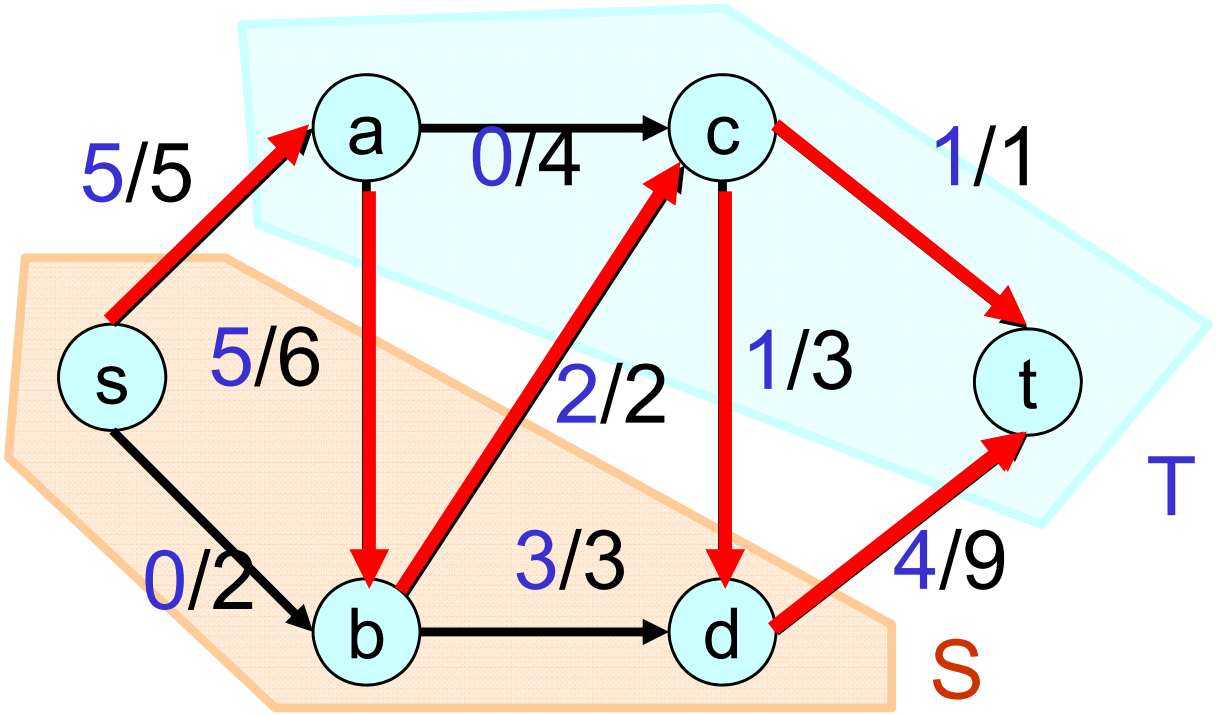
性質1：

任意のカット(S, T) と任意の実行可能フロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ に対し

SからTへの枝のフローの和 x(S,T)

－ TからSへの枝のフローの和 x(T,S)

＝ フローの総流量 f



f = 1 + 4 = 5

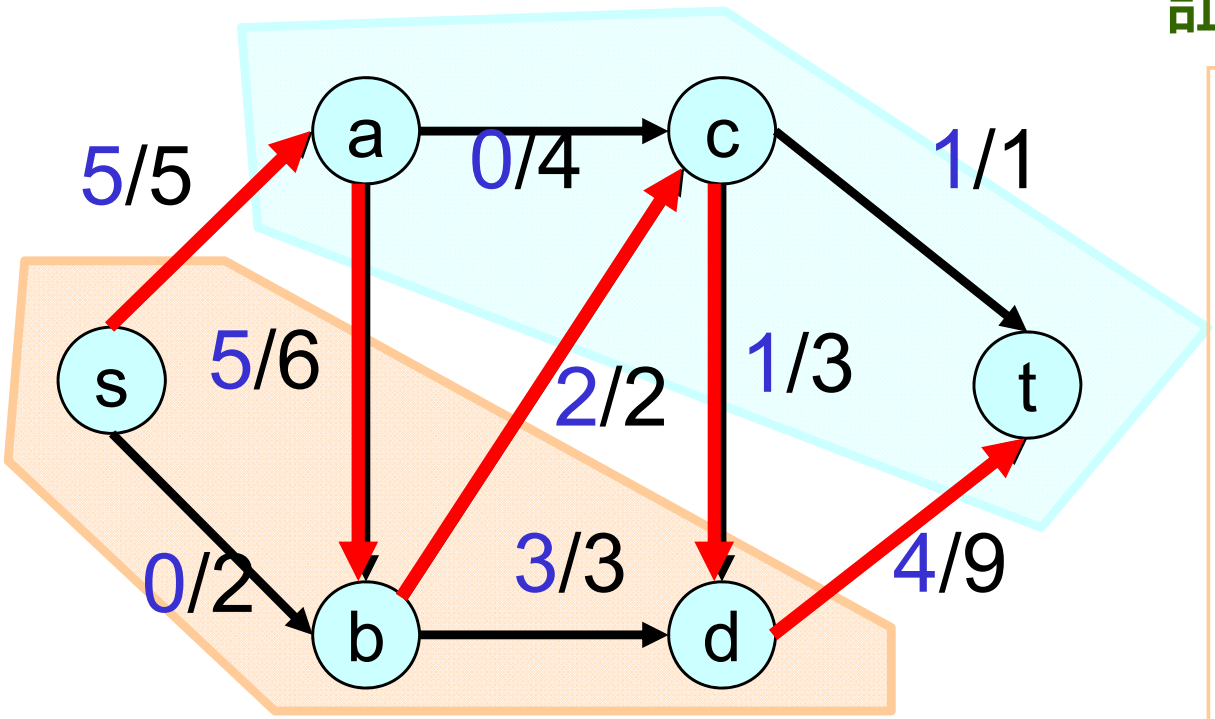
x(S, T) = 5 + 2 + 4 = 11

x(T, S) = 5 + 1 = 6

f = 11 – 6 = 5

カットの性質（その2）

性質2：任意のカット(S, T) とフロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ に対し
フローの総流量 f ≦ カットの容量 C(S,T)



f = 5 ≦ 16 = C(S, T)

証明：

f = x(S, T) – x(T,S)
（性質１）
x(S, T) ≦ C(S, T)
（容量条件）
x(T, S) ≧ 0
（フローは非負）
∴ f ≦ C(S, T) – 0
= C(S, T)

最小カット問題

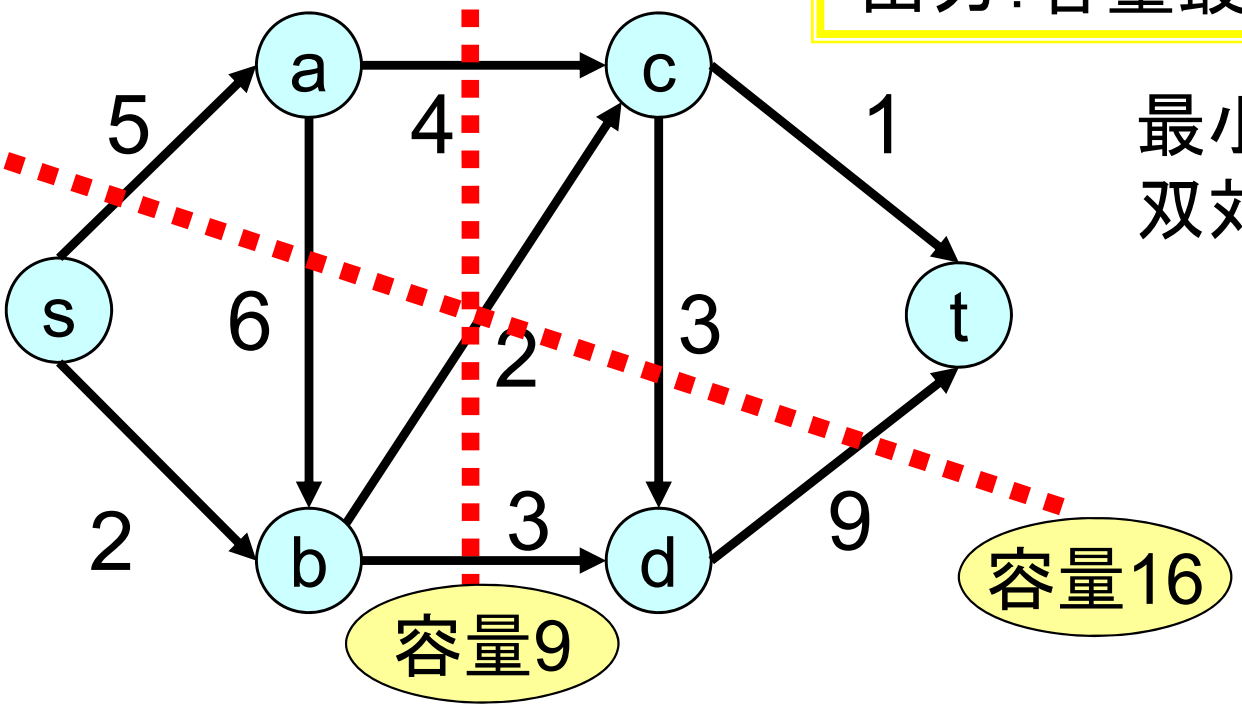
性質2：任意のカットとフローに対し
フローの総流量 ≦ カットの容量

LPの弱双対定理に対応

⇒ カットの容量は，最大フローの総流量に対する上界

より良い上界を求めたい⇒

最小カット問題
入力：グラフ G = (V, E), 頂点 s, t ∈V
出力：容量最小の s-t カット（最小カット）



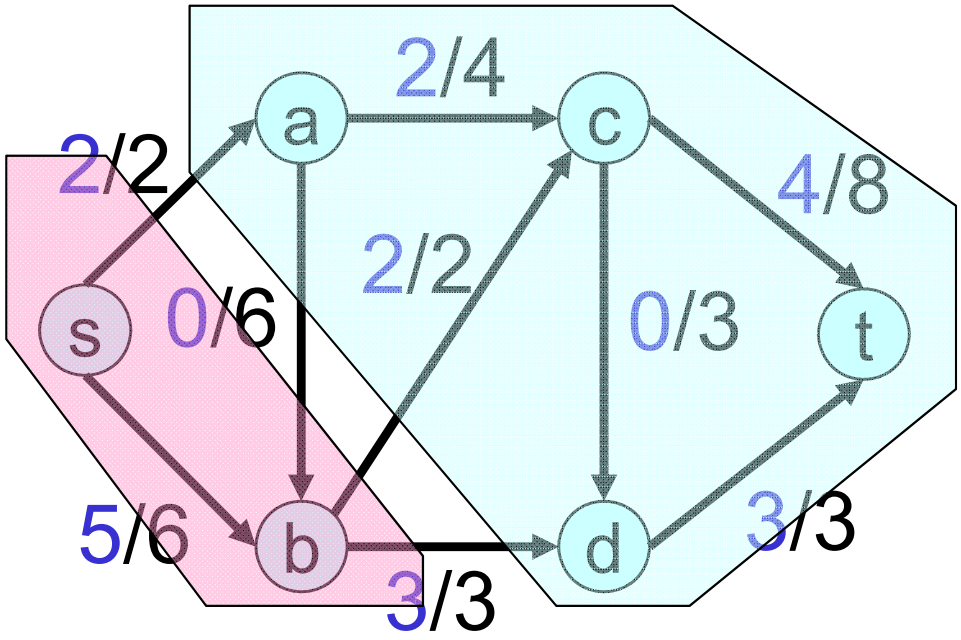
最小カット問題は最大流問題の双対問題

カットの性質（その3）

性質2より次が導かれる

性質3：任意のカット(S, T) とフロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ に対し
フローの総流量 f = カットの容量 C(S,T) が成り立つ

➔ 現在のフローは最大フロー，カットは最小カット

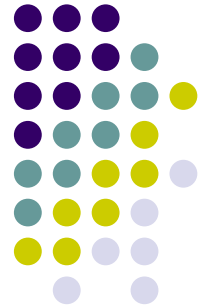


※増加路アルゴリズムの正当性の
証明に使用

f = 7,　C(S, T) = 7

➔ 現在のフローは最大フロー，
カットは最小カット

最大フロー最小カット定理



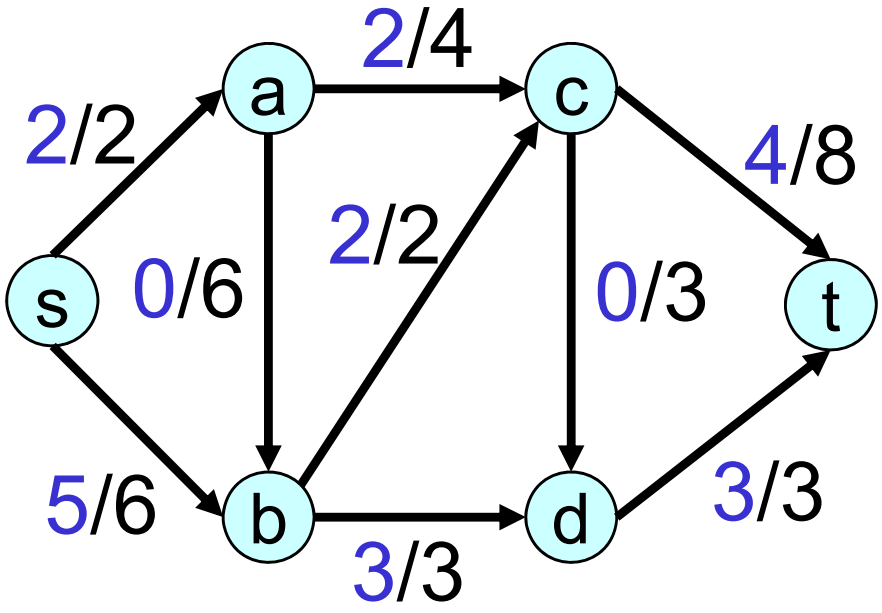
増加路アルゴリズムの正当性の証明

定理：増加路アルゴリズムは最大フローを求める.
また,
S = 残余ネットワークで s より到達可能な頂点集合
T = V – S
とすると、(S, T) は 最小カット .
さらに, f = C(S,T) が成立

この性質より,「最大フローの総流量＝最小カットの容量」が成立

最大フロー最小カット定理：
最大フロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ と最小カット(S,T)に対し
$f = C(S,T)$

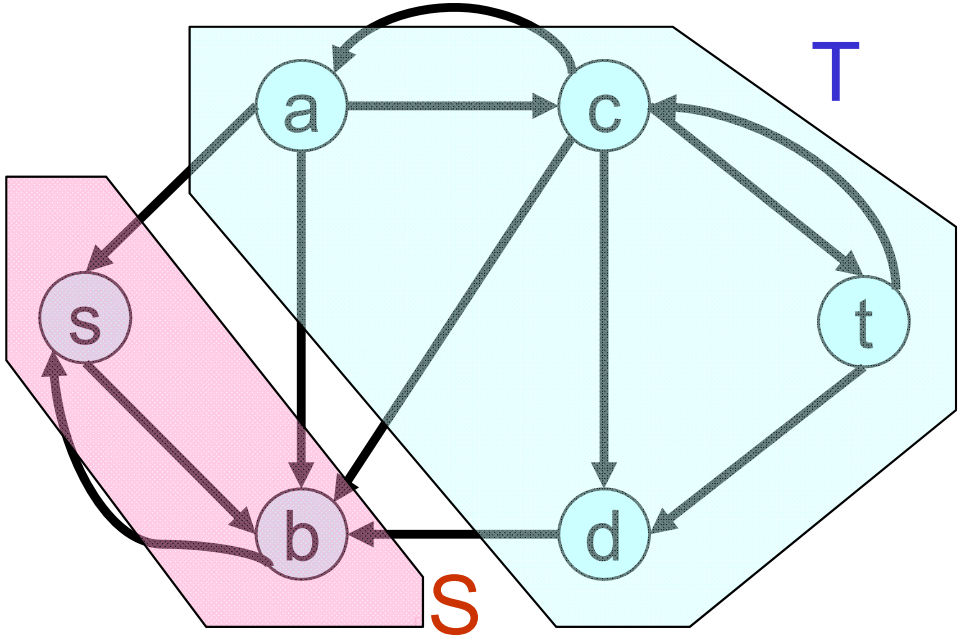
増加路アルゴリズムの正当性(その1)



目標:アルゴリズム終了時のフローに対し, f = C(S,T)を満たすカット(S,T)を見つける➔性質3より最大フロー

アルゴリズム終了時のフローに対して残余ネットワークを作る

残余ネットワークには増加路がない

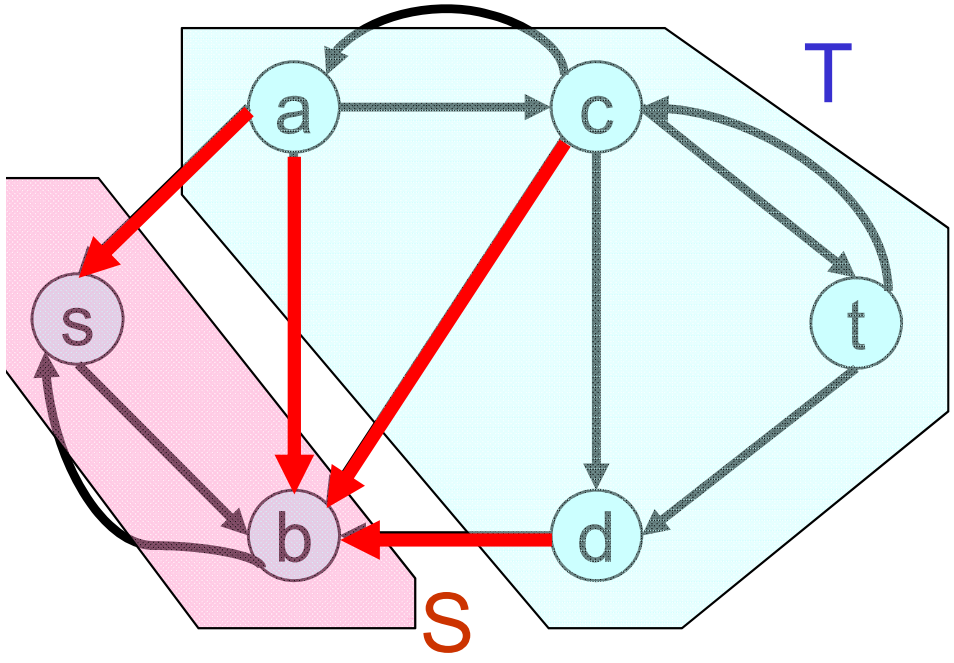


S = 残余ネットワークにおいて
s から到達可能な頂点集合

T = V – S

に対し、(S, T) はカット

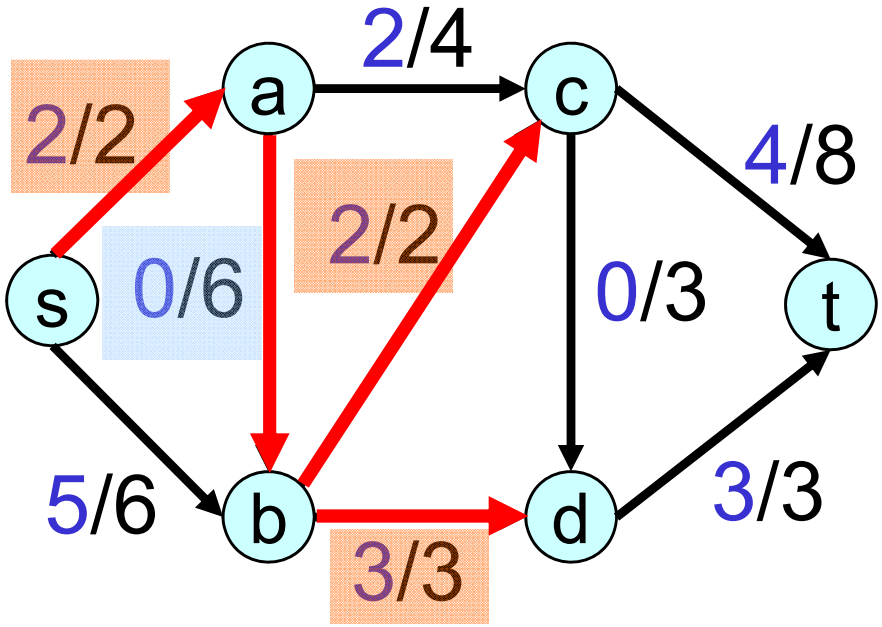
増加路アルゴリズムの正当性(その2)



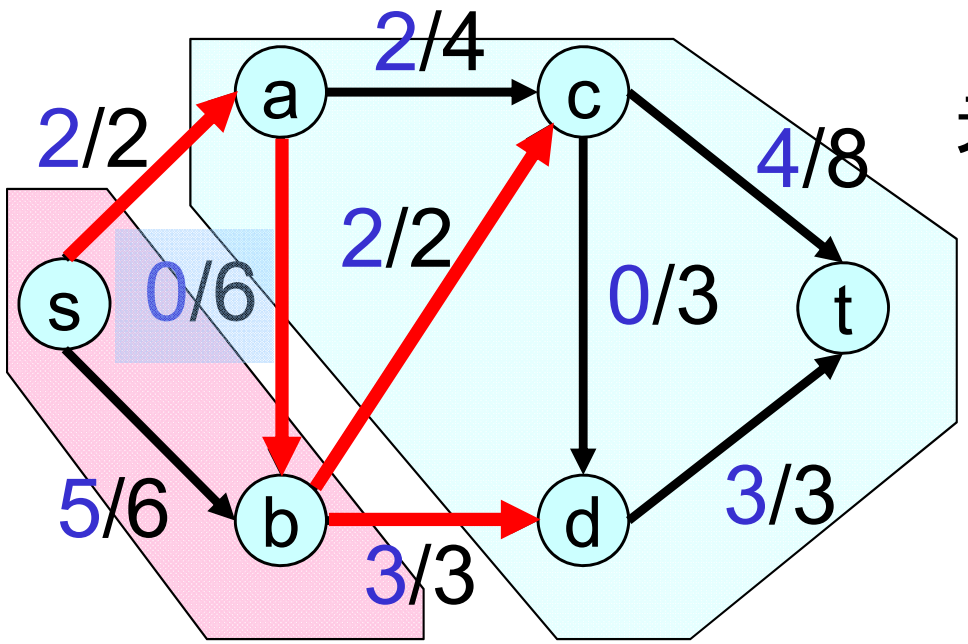
S = s から到達可能な頂点集合
T = V – S

残余ネットワークにおいて
SからTに向かう枝は存在しない

元のネットワークにおいて
SからTに向かう枝では $x_{ij} = u_{ij}$
TからSに向かう枝では $x_{ij} = 0$



増加路アルゴリズムの正当性（その3）



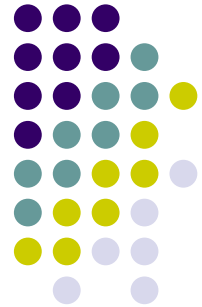
元のネットワークにおいて
SからTに向かう枝では $x_{ij} = u_{ij}$
TからSに向かう枝では $x_{ij} = 0$

$x(S, T) = \sum\{x_{ij} \mid (i,j)$ はSからTへ向かう枝$\}$
$= \sum\{u_{ij} \mid (i,j)$ はSからTへ向かう枝$\} = C(S, T)$
$x(T, S) = \sum\{x_{ij} \mid (i,j)$ はTからSへ向かう枝$\} = 0$
$\therefore\ x(S, T) - x(T, S) = C(S, T)$

性質1より $f = x(S,T) - x(T, S)$

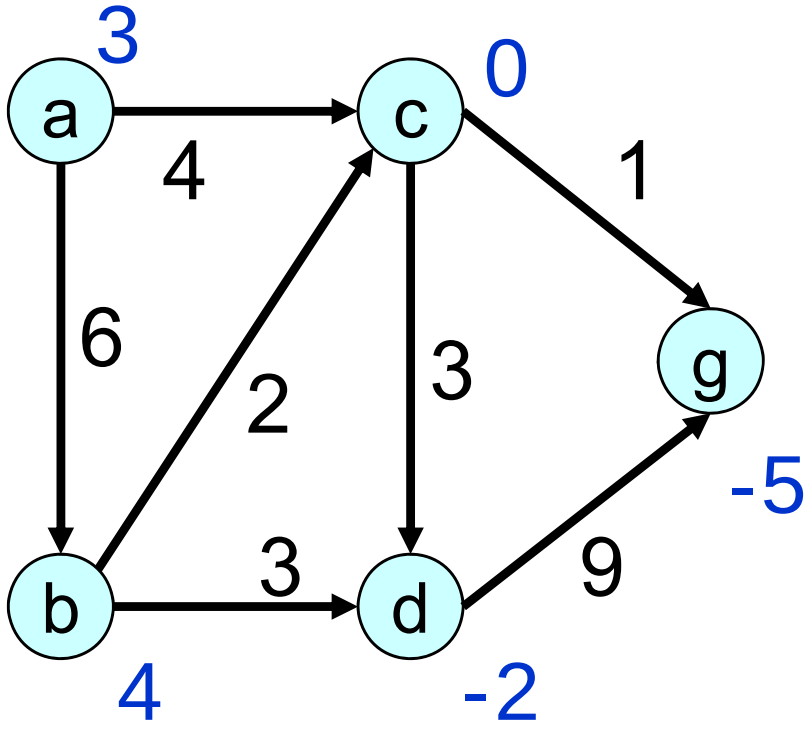
$\therefore\ f = C(S, T)$ （証明終わり）

応用：供給・需要を満たすフローを求める



入力：有向グラフ $G = (V, E)$
各枝 $(i, j) \in E$ の容量 $u_{ij} \geqq 0$
各頂点 $i \in V$ の供給・需要量 b_i（ただし b_i の和は0）
($b_i > 0$ ➔ i は供給点, < 0 ➔ i は需要点, $= 0$ ➔ i は通過点)

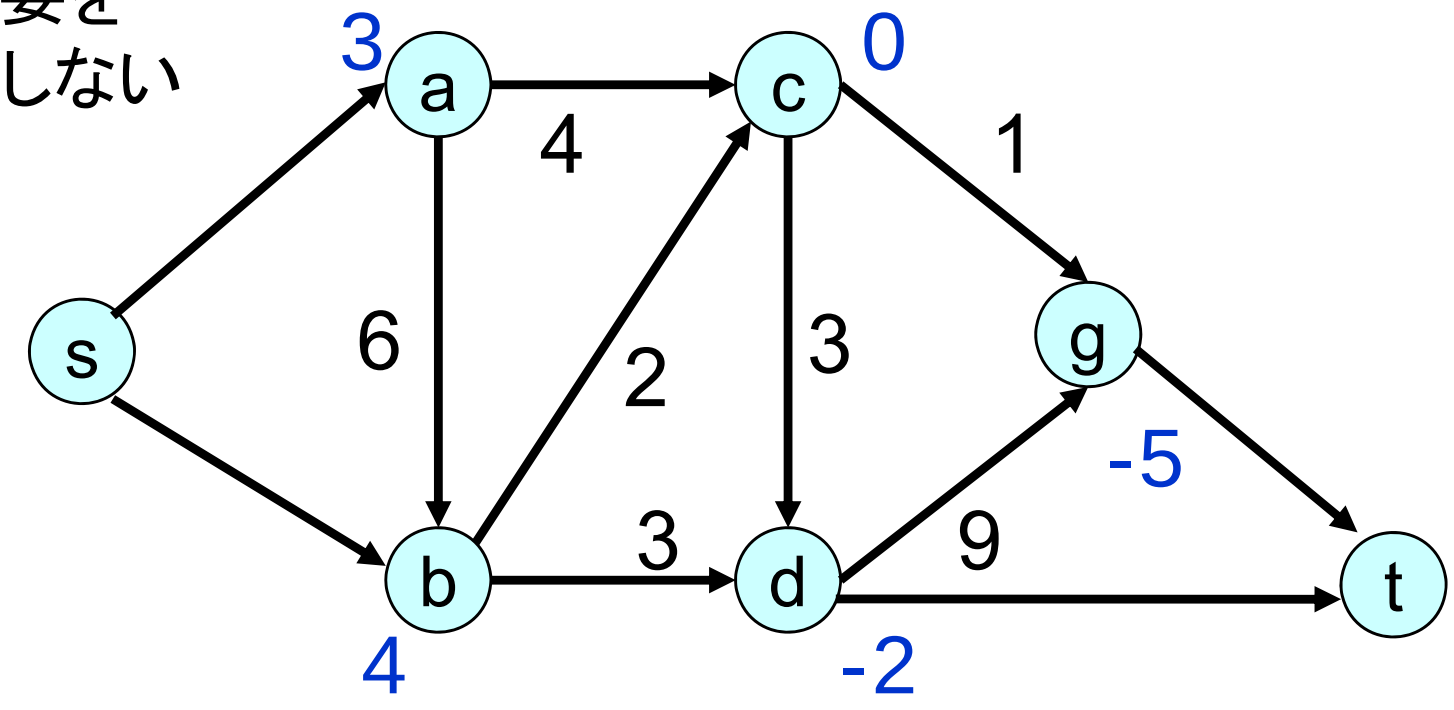
出力：次の条件を満たすフロー
●各頂点 $i \in V$ での供給・需要条件
（i から流出するフロー量）
　　－（i に流入するフロー量）＝b_i
●各枝 (i, j) の容量条件
$$0 \leqq x_{ij} \leqq u_{ij}$$

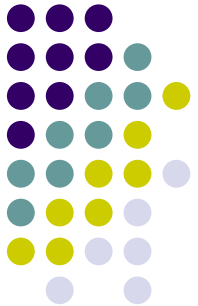


応用：供給・需要を満たすフローを求める

最大流問題に帰着

(1)新たな頂点 s（ソース），t（シンク）を追加
(2)$b_i > 0$ ならば枝(s, i)を追加，容量はb_i
(3)$b_i < 0$ ならば枝(i, t)を追加，容量は $- b_i$
(4)最大フローを求める.
(5)各枝(s, i)に対し $x_{si} = b_i$ ➔供給・需要を満たすフローが得られる
それ以外➔供給・需要を
満たすフローは存在しない





最小費用流問題

最小費用流問題

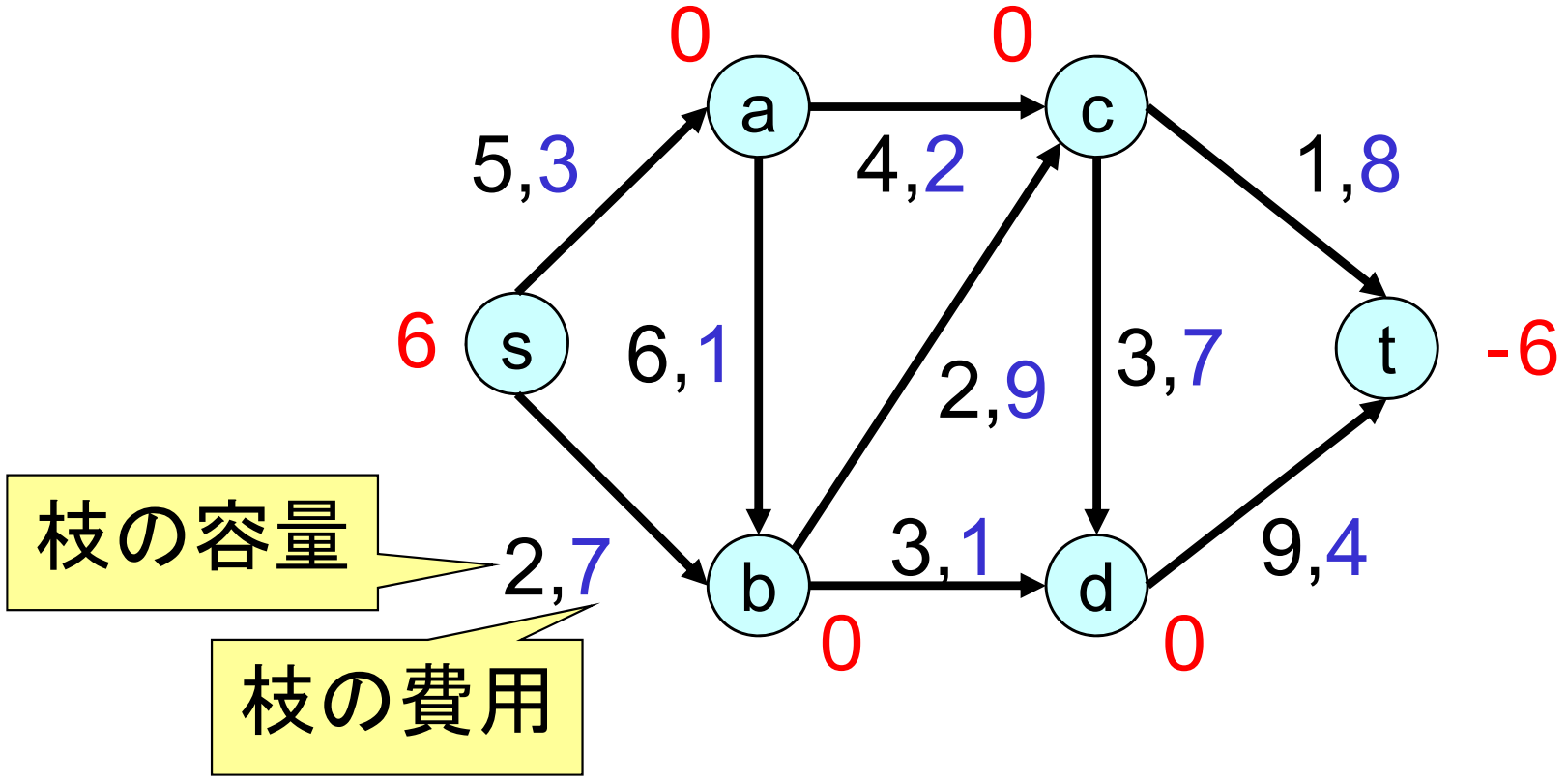
入力：有向グラフ G = (V, E)

各頂点 i ∈Vの供給・需要量 b_i（ただし b_i の和は0）

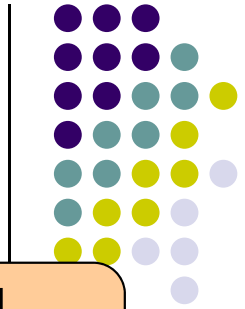
(b_i >0➔ i は供給点, <0➔ i は需要点, =0➔ i は通過点)

各枝 (i, j) ∈ E の容量 $u_{ij} \geqq 0$, 費用 c_{ij}

出力：需要供給を満たすフローで総費用が最小のもの



最小費用フロー問題：定式化



目的：最小化　$\sum_{(i,j)\in E} c_{ij} x_{ij}$

（各枝の費用×フロー量）の和

条件　$0 \le x_{ij} \le u_{ij}$　$((i,j) \in E)$

各枝の容量条件

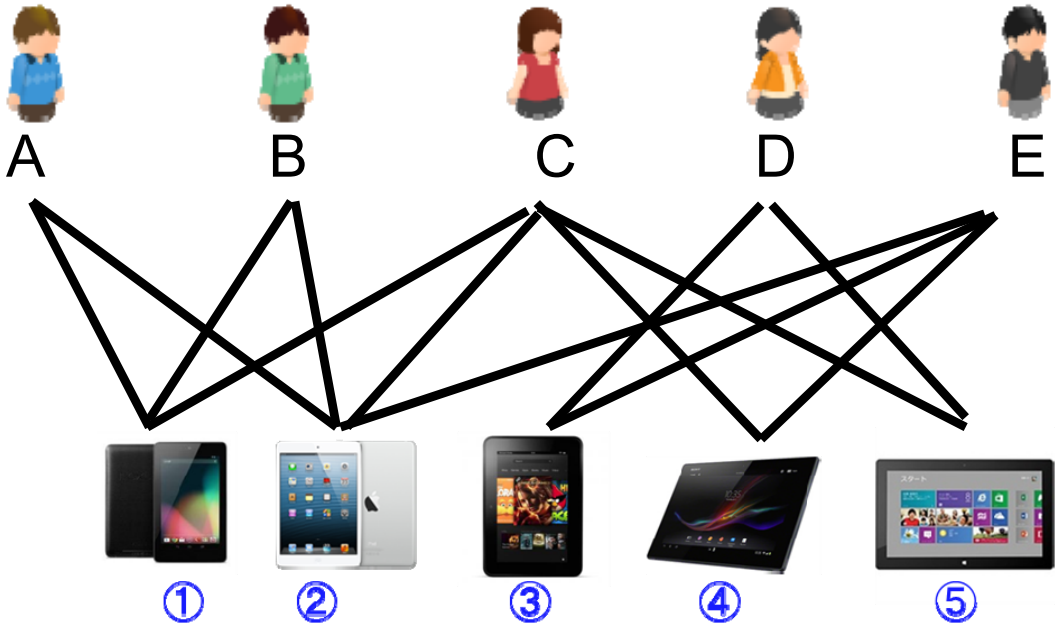
$\sum\{x_{kj} \mid (k,j)$ は k から出る枝$\}$
$-\sum\{x_{ik} \mid (i,k)$ は k に入る枝$\} = b_k$　　$(k \in V)$

各頂点での流量保存条件（需要供給量に関する条件）

これも線形計画問題

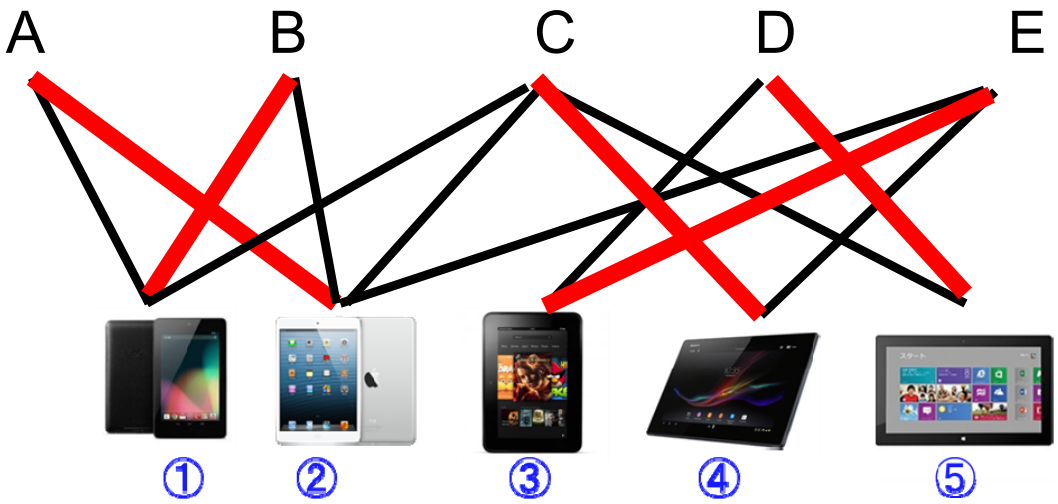
最小費用流問題の応用例：最大重みマッチング

- 品物の重み付き割当問題（最大重みマッチング問題）
  - m 個の品物を，n人の希望者に割り当てる
  - 各希望者は，欲しい品物とその満足度（重み）のリストを提示
    ➔その中の高々一つを割り当てる
  - 満足度の合計が最大になるように，商品を割り当てたい



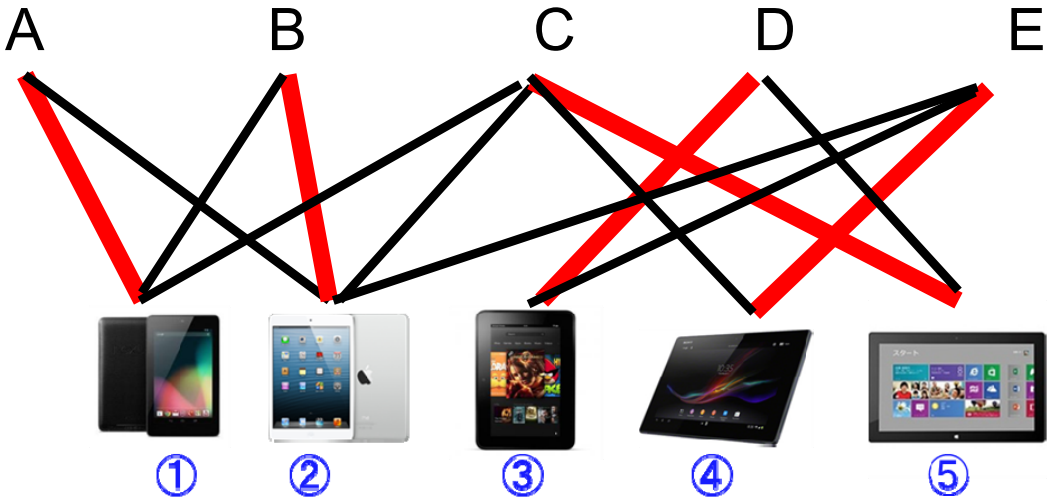
	A	B	C	D	E
①	5	9	4		
②	8	6	5		9
③				8	4
④			9		3
⑤			7	8	

マッチングの例



	A	B	C	D	E
①	5	9	4		
②	8	6	5		9
③				8	4
④			9		3
⑤			7	8	

満足度
38

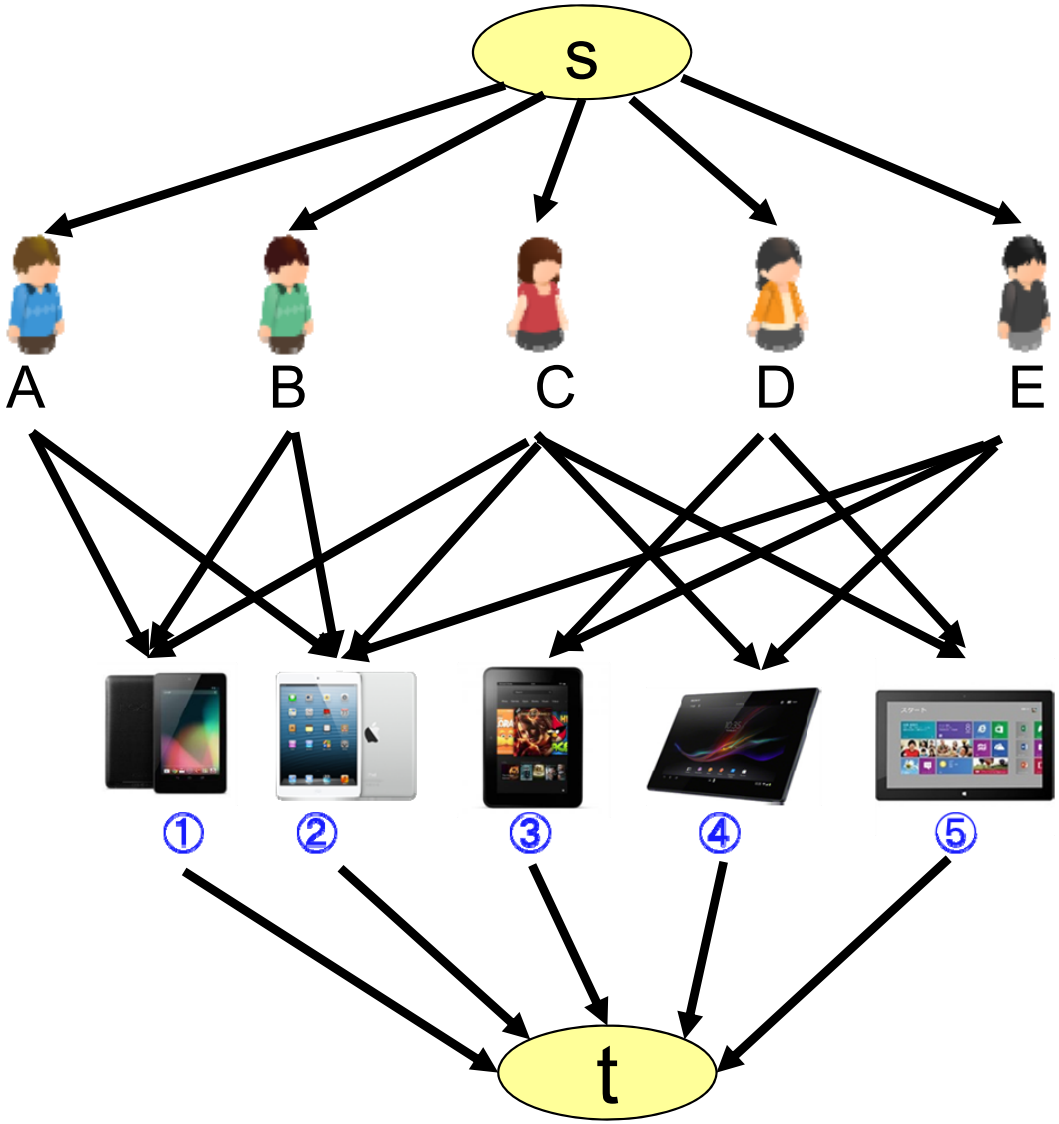


	A	B	C	D	E
①	5	9	4		
②	8	6	5		9
③				8	4
④			9		3
⑤			7	8	

満足度
29

最大重みマッチングから最小費用流へ

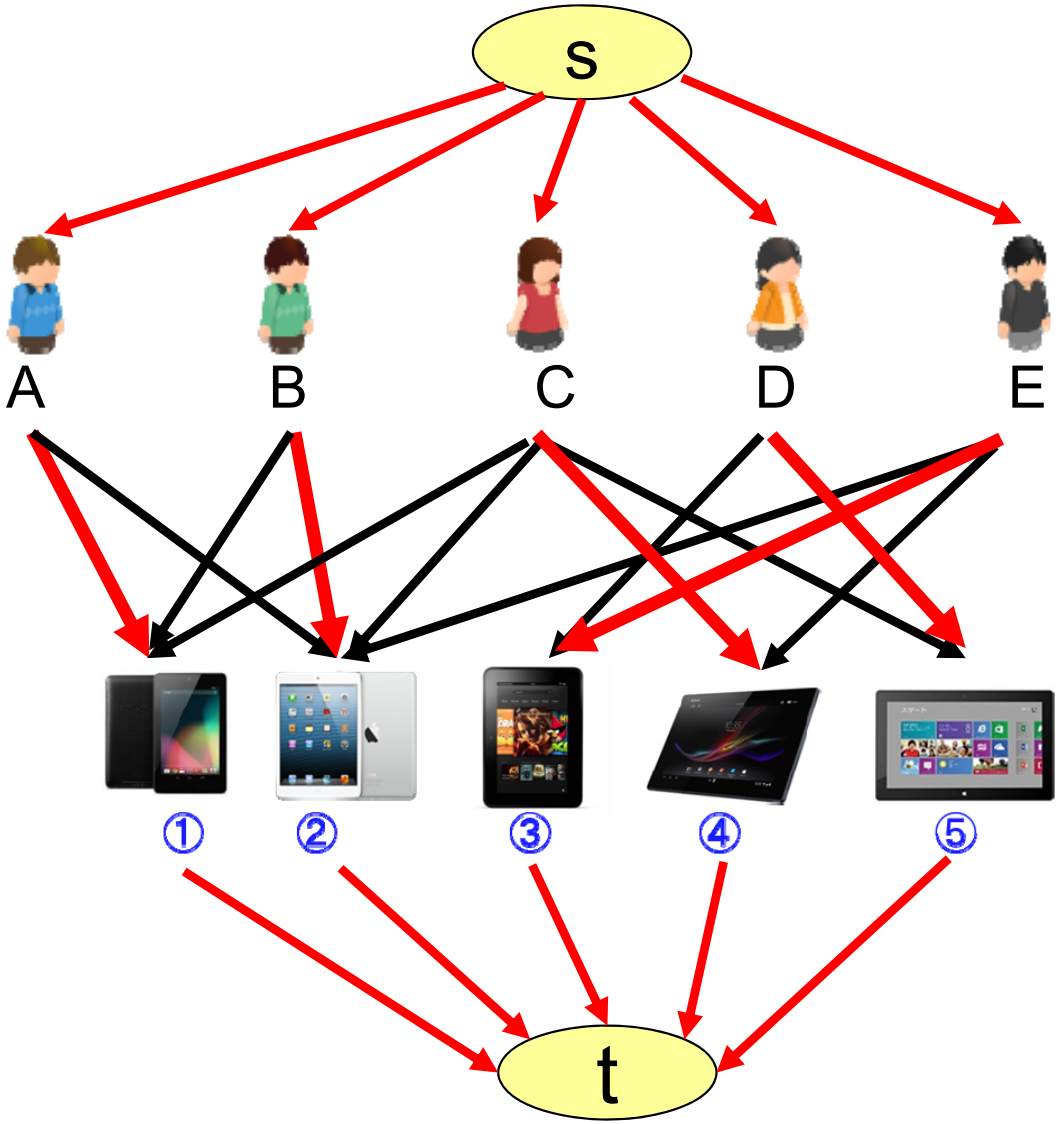
- 最大重みマッチング問題は最小費用流問題へ帰着可能



- 最大マッチング問題の場合と同様にグラフを作成
- 枝容量も同様に設定
- 枝の費用の設定
  - 希望者から商品への枝：（満足度）×（－1）
  - その他の枝：0

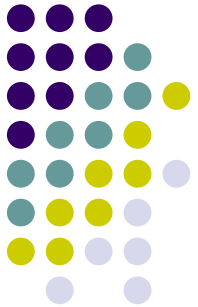
最大重みマッチングから最小費用流へ

- 最大重みマッチング問題は最小費用流問題へ帰着可能



- 最大マッチング問題の場合と同様にグラフを作成
- 枝容量も同様に設定
- 枝の費用の設定
  - 希望者から商品への枝：（満足度）×（－1）
  - その他の枝：0

最小費用流問題の応用例:
研究室配属問題



- 各研究室に学生数人を割り当てる

  学生A,B,C,Dの４人を研究室X,Yへ

- 各研究室に配属できる人数には上限がある

	X研究室	Y研究室
定員	3	3

- 学生の満足度の合計を最大にしたい

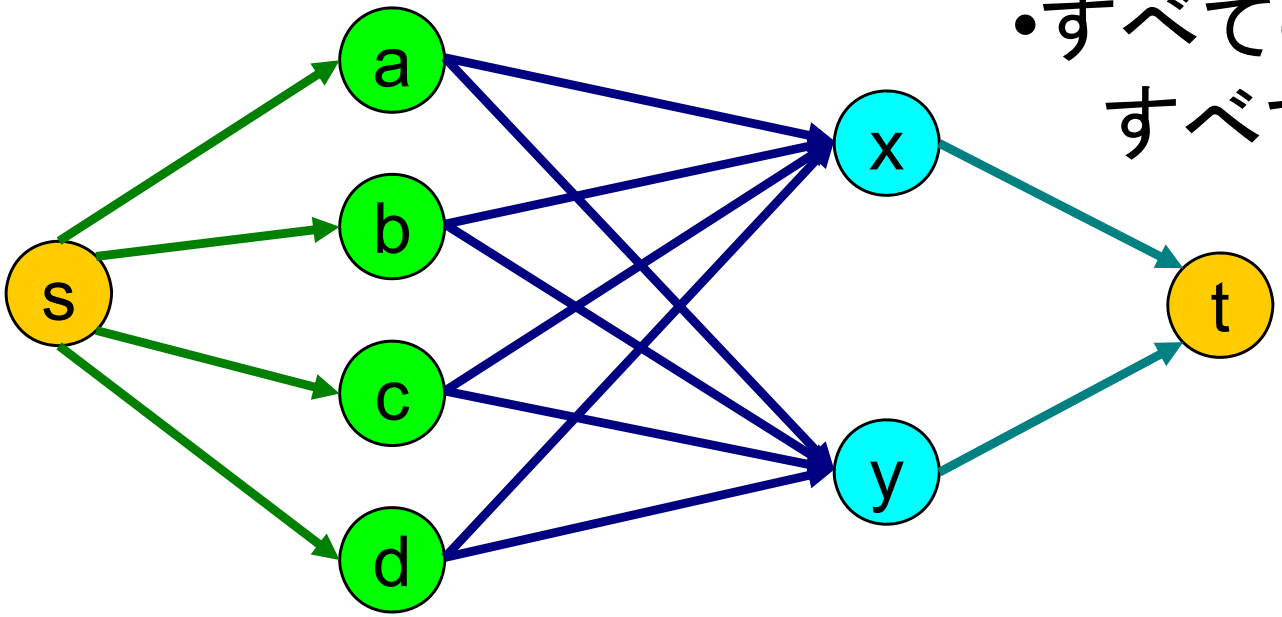
満足度	A	B	C	D
X	6	8	5	9
Y	9	1	5	3

応用例：研究室配属問題

最小費用流問題に変形

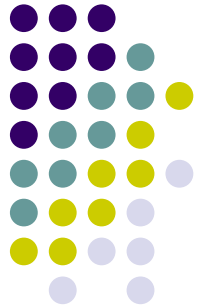
- 各学生に対応する頂点 a, b, c, d（通過点）
- 各研究室に対応する頂点 x, y（通過点）
- 供給点 s, 需要点 t

- 供給点から学生頂点への枝 (s, a), (s, b), …
- 研究室頂点から需要点への枝 (x, t), (y, t)

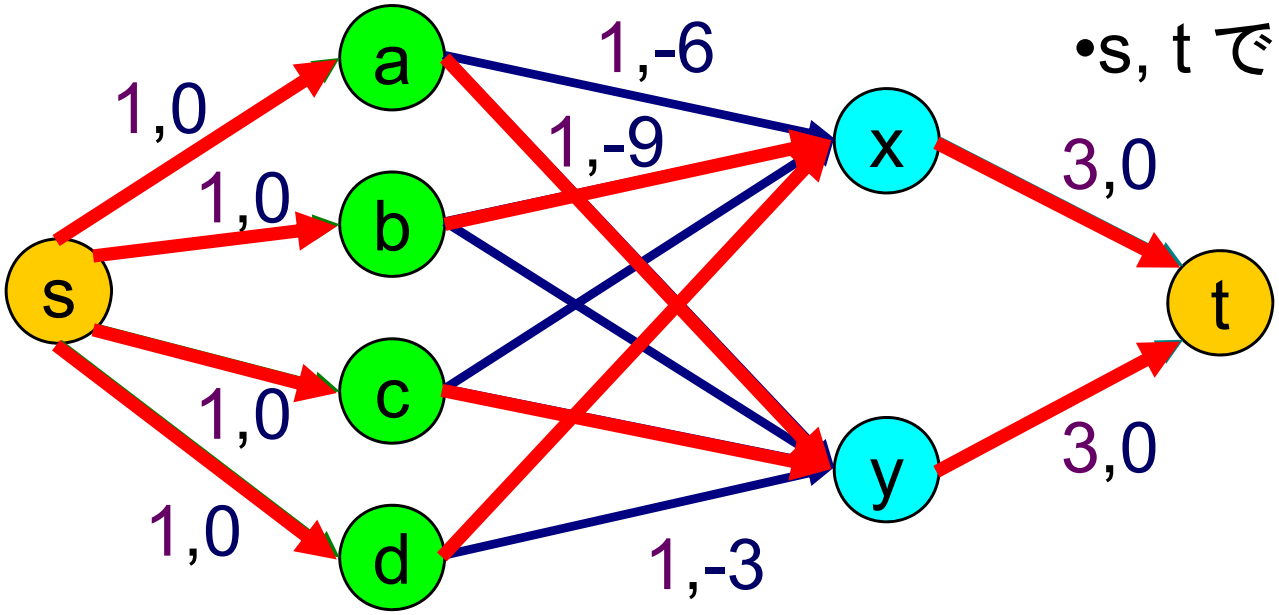


- すべての学生頂点から
  すべての研究室頂点への枝
  (a, x), (a, y), (b, x), …

応用例：研究室配属問題



- 供給点から学生頂点への枝：容量1、費用0
- 研究室頂点から需要点への枝：容量＝研究室の定員、費用0
- 学生頂点から研究室頂点への枝：容量1、費用＝（－1）×満足度



- s, t での需要（供給）量＝学生数

学生B,D→X研究室

学生A,C→Y研究室

この問題の（整数値）フロー⇔定員を満たす配属方法

フローの費用⇔（－1）×学生の満足度の合計

∴最小費用流問題に変形できた