2025 年度 オペレーションズ・リサーチ基礎 期末試験問題

2026 年 2 月 3 日(火) 10 時 45 分〜12 時 15 分（90 分）

※問題は問1から問4まであります.

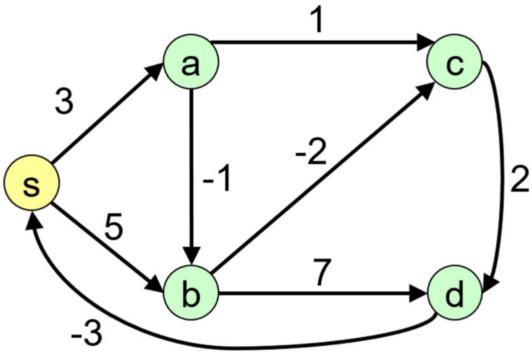
※解答用紙全てに学籍番号を書いてください. 名前は 1 枚目のみで構いません.

※A4 用紙を持ち込んでいる場合には, 名前と学籍番号を書いて必ず提出すること.

以下と裏面は計算用紙に使ってください

問１

（1）左下図のネットワークにベルマン・フォードのアルゴリズムを適用して，負閉路の有無を判定せよ．アルゴリズムの計算過程として，右下図のような表を解答用紙に書き，マス目を埋めること．



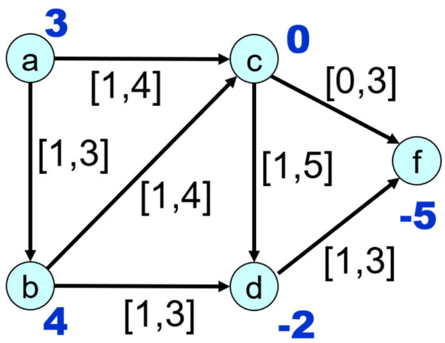
	k=0	1	2	3	4	5
s	0					
a	+∞					
b	+∞					
c	+∞					
d	+∞					

（2）上記の差制約系を最短路問題に帰着するときに使うグラフを書け．**<u>最短路問題における始点，および各枝の長さを書く</u>**こと．解を求める必要はない．

$$p_1 - p_3 \leq 1,\ p_2 - p_3 \leq -1,\ p_1 - p_2 \leq -3,\ p_1 \leq -2,\ p_2 \geq -4,\ p_2 - p_1 \leq 2$$

（3）頂点集合をV，枝集合をEとするネットワークにおいて，最短路問題について考える．始点は$s \in V$である．各枝(i,j)の長さをℓ_{ij}とする．このネットワークにおいて，始点sから各頂点$v \in V$への最短路が存在するとき，このネットワークに負閉路は存在しない．このことを証明せよ．

（4）右図のネットワークにおいて実行可能フローを求める問題を考える．各頂点に付随する数字は，その頂点の供給・需要量を表す．各枝に付随する区間は，その枝を流れるフローの下界値と上界値を表す．この問題を，最大流問題に帰着したい．



[4-1] この実行可能フローを求める問題を，フローの下界値が0のネットワークにおいて実行可能フローを求める問題に帰着することが可能である．その際に使うネットワークを図示せよ．グラフの頂点と枝，各頂点の供給・需要量，および各枝の容量（フローの上界値）を書けば良い．

[4-2] 上記の[4-1]で得られた問題を最大流問題に帰着することができる．その際に使うネットワークを図示せよ．グラフの頂点と枝，ソースとシンク，および各枝の容量（フローの上界値）を書けば良い．

問２

（1）あるネットワークにおける最大流問題について考える. 各枝 (i,j) の容量をu_{ij}とする. 任意のカット(A,B)に対し, 頂点集合Aから頂点集合Bに向かう枝の容量の和を$C(A,B)$と書く. また, フローx とカット(A,B)に対し, 頂点集合Aから頂点集合Bに向かう枝のフローの和を$x(A,B)$, 頂点集合Bから頂点集合Aに向かう枝のフローの和を$x(B,A)$と書く.

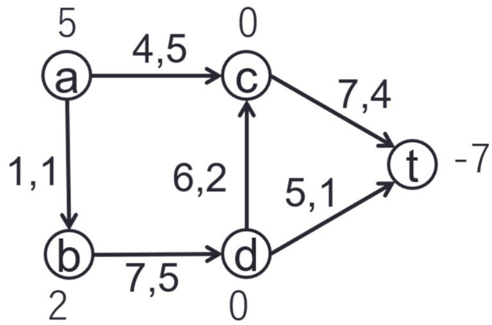
［1-1］任意のフローxと任意のカット(A,B)を考える. フローxの総流量をfとする. このとき, 不等式$f \leq C(A,B)$が成り立つ. これを証明せよ.
（ヒント： $f = x(A,B) - x(B,A)$ という等式を使ってよい）

［1-2］あるフロー x' とあるカット (A',B') に対し, 以下の条件が成り立つとする：

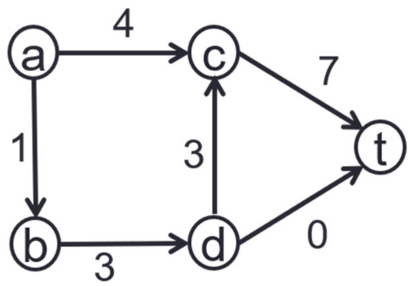
- 頂点集合A'から頂点集合B'に向かう枝のフローの値は, 枝容量に等しい,
- 頂点集合B'から頂点集合A'に向かう枝のフローの値は0である.

このとき, フローx'の総流量f'に対して $f' = C(A,B)$ が成り立つ. このことを証明せよ.
さらに, [1-1]の結果をふまえて, フローx'が最大フローであることを証明せよ.

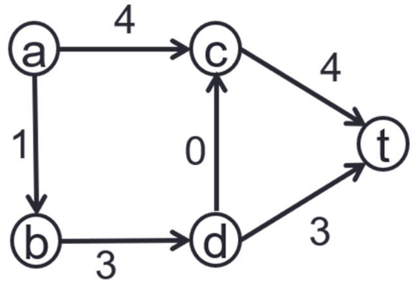
（2）右図のグラフにおける最小費用流問題を考える.
各枝に付随する数字のうち, 左側は枝の容量u_{ij}, 右側は枝の費用 c_{ij} を表す. 各頂点に付随する数字は, その頂点 v における供給・需要量 b_v を表す.



［2-1］右図の実行可能フローに関する残余ネットワークを書け. また, 負閉路消去アルゴリズムを適用して, 最小費用フローを求めよ.



［2-2］右下図の実行可能フローに対するポテンシャルの条件式を全て書け. また, $p_t = 0$ を満たすポテンシャルをすべて求めよ. ポテンシャルが複数存在する場合は, 解の表現に使うパラメータ（変数）の個数を最小限にすること.



問 3:

（1）制約なし最適化問題に対するニュートン法の長所と短所について, 重要なものをそれぞれ2つずつ書け.

（2）関数 $f(x,y)=(x+y)^2+y^3$ について考える.

［2-1］関数 f の勾配ベクトル $\nabla f(x,y)$ とヘッセ行列 $\mathrm{H}f(x,y)$ を計算せよ.
［2-2］$(x,y)=(2,1)$ においてニュートン法を適用したときの**次の点**を計算せよ. 途中の計算過程も書くこと.

（ヒント：正則行列$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$の逆行列は $\frac{1}{ac-b^2}\begin{bmatrix} c & -b \\ -b & a \end{bmatrix}$）

（3）関数 $f(x,y)=(x+y)^3-4(x+y)+(x-y)^3$ について考える.

［3-1］関数 f の勾配ベクトル $\nabla f(x,y)$ とヘッセ行列 $\mathrm{H}f(x,y)$ を計算せよ.
［3-2］ベクトル(3,1)が極小解か否かを答えよ. その理由も書くこと.
［3-3］ベクトル $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ が極小解か否かを答えよ. その理由も書くこと.
なお, [3-2]と[3-3]で理由を述べるとき, 授業で説明した定理を使ってもよい.

問 4:

（1）制約つき非線形最適化問題

$$\text{最小化} \quad x^2-y^2 \qquad \text{条件} \quad x+y\leq 3,\ y\leq 2$$

について考える.

［1-1］この問題に対する KKT 条件すべてを具体的に書け.

［1-2］KKT 条件を満たす(x,y)および対応するラグランジュ乗数を**全て**求めよ. **計算の過程も書くこと.**

［1-3］この問題の実行可能領域を図示せよ. 結果のみ書けばよい.

（2）関数 $f(x,y)=(2x+y)^2+\frac{1}{2}y^2$ について考える.

［2-1］関数 f の勾配ベクトル $\nabla f(x,y)$ を計算せよ.
［2-2］$(x,y)=(1,-2)$ において最急降下法を適用したときの**次の点**を計算せよ. 途中の計算過程も書くこと.
［2-3］上記の[2-2]で求めた次の点が極小解か否かを答えよ. 理由も書くこと.