2025 年度 オペレーションズ・リサーチ基礎 中間試験問題

2026 年 1 月 6 日(火) 10 時 45 分〜12 時 15 分（90 分）

※問題は問1から問4まであります.

※解答用紙全てに名前を書いてください. 学籍番号は 1 枚目のみで構いません.

※A4 用紙を持ち込んでいる場合には, 名前と学籍番号を書いて必ず提出すること.

以下と裏面は計算用紙に使ってください

問1:

不等式標準形の線形計画問題(P)と, その双対問題(D)を考える.

(P)	(D)
最小化: $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$	最大化: $b_1y_1 + \cdots + b_my_m$
条件: $a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1$	条件: $a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m \leq c_1$
$\vdots$	$\vdots$
$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m$	$a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_m \leq c_n$
$x_1 \geq 0, \ \ldots, x_n \geq 0$	$y_1 \geq 0, \ \ldots, y_m \geq 0$

(P)の任意の実行可能解 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, および(D)の任意の実行可能解 $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ に対し, 不等式 $\sum_{j=1}^{n} c_jx_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_iy_i$ が常に成り立つ(弱双対定理とよばれる). このことを使って, 以下を証明せよ.

(1) (P)の任意の実行可能解 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, および(D)の任意の実行可能解 $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ に対し, それらの目的関数値が等しいとき, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は(P)の最適解であり, $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ は(D)の最適解である. このことを証明せよ. (注意:証明において「以下同様」のように書いて省略した場合, 減点されることがある)

(2) 主問題(P)と双対問題(D)の解に対する相補性条件を書け. 結果のみ書けばよい.

(3) (P)の任意の実行可能解 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, および(D)の任意の実行可能解 $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ に対し, 相補性条件が成り立つとき, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は(P)の最適解であり, $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ は(D)の最適解である. 小問(1)で証明した主張を用いて, このことを証明せよ.

問2:

以下の線形計画問題の辞書に**(1段階または2段階の)単体法を適用して,** それぞれの線形計画問題が

- 最適解をもつ,
- 非有界である,
- 実行不可能である,

のいずれに当てはまるかを, その理由と共に答えよ. 単体法を適用したときの計算過程も書くこと. 単体法のピボット演算では, 最小添字規則を用いること.

(1)

$$z = 7 + 4x_1 - 2x_2 - x_3$$
$$x_4 = 1 - x_1 - x_2 - x_3$$
$$x_5 = 2 - 3x_1 - x_2 - 2x_3$$

(2)

$$z = 0 + x_1 - 2x_2 + 2x_3$$
$$x_4 = 1 - 2x_1 + x_2 - x_3$$
$$x_5 = 4 - x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

(3) 2段階単体法を適用すること

$$z = 0 - 2x_1 - 4x_2$$
$$x_3 = 1 + x_1 + x_2$$
$$x_4 = -3 - x_1 - x_2$$

問3：

ある 0-1 ナップサック問題を分枝限定法により解いている過程で, 右の部分問題が得られた状況を考える. この時点で, 目的関数値が 17 の暫定解が得られているものとする.

最大化	$16x_3 + 10x_4 + 7x_5$
条件	$3x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 4$
	$x_3, x_4, x_5 \in \{0,1\}$

(1) 部分問題の緩和問題として, 各変数の「0 または 1」という条件を「0 以上 1 以下」に置き換えて得られる線形計画問題を考える. この緩和問題の最適解と最適値を求めよ. 結果のみ書けばよい.

(2) 小問(1)の結果を踏まえて, この部分問題に対して限定操作が適用可能か否かを答えると共に, その理由を説明せよ.

(3)「任意に選んだ k 個の品物に対し, それらの重さの合計がナップサックの容量より大きいならば, それらの品物の中でナップサックに詰め込めるものの個数は k-1 以下である」という考えに基づいて, 0-1 ナップサック問題の妥当不等式を得ることができる. 上記の部分問題に対し, この考えに基づいて得られる妥当不等式をすべて示せ. 結果のみ書けばよい.

(4) 部分問題に小問(3)で得られた妥当不等式すべてを追加した問題に対し, 各変数の「0 または 1」という条件を「0 以上 1 以下」に置き換えて得られる線形計画問題を考える. この緩和問題の最適解と最適値を求めよ. 結果のみ書けばよい. (ヒント：この線形計画問題を解くとき, 元々の不等式条件$3x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 4$を無視してよい)

(5) 小問(4)の結果を踏まえて, この部分問題に対して限定操作が適用可能か否かを答えると共に, その理由を説明せよ.

問4

最大化	$8x_1 + x_2 + 20x_3 + 6x_4 + 11x_5 + 10x_6$
条件	$2x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 4x_6 \leq 10$
	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0,1\}$

(1) 右のナップサック問題について考える.

[1-1] この問題の緩和問題である, 連続ナップサック問題の最適解と最適値を求めよ. 計算過程も記述すること.

[1-2] この問題に対し, (授業で説明した)改良版貪欲アルゴリズムを用いて近似解を求めよ. また, その解の目的関数値と近似比を計算せよ(最適値は29である). 近似解を求める計算過程も記述すること.

(2) 右の点集合に関する巡回セールスマン問題を考える. 点対の距離はユークリッド距離で与えられるものとする. この問題に対し, (授業で説明した) 2近似アルゴリズムおよび1. 5近似アルゴリズムを用いて, 近似解を求めよ. 近似解を求める過程を 4 つのステップに分けて, 解答用紙最終ページに図を書いて説明すること.

なお, 途中のステップで求める最小全域木や最小重みマッチングについては, 必ずしもそれらの長さ・重みが最小でなくてもよいものとするが, 最適解との誤差が大きい場合には, 減点の対象となる(誤差の目安：20%以内).