※問題は問1から問4まであります.

※解答用紙全てに学籍番号を書いてください. 名前は 1 枚目のみで構いません.

※A4 用紙を持ち込んでいる場合には, 名前と学籍番号を書いて必ず提出すること.

以下と裏面は計算用紙に使ってください

2023 年度 オペレーションズ・リサーチ基礎 期末試験問題［50 点満点］

2024 年 2 月 8 日(木) 10 時 45 分～12 時 15 分（90 分）

問 1

（1）頂点集合をV，枝集合をEとするネットワークにおける最大流問題を考える. ソースの頂点をs，シンクをtとする. また, 各枝(i,j)の容量をu_{ij}とする.

このネットワークにおける, ある(実行可能な)フローx_{ij} $((i,j) \in E)$ について考える. このフローに関して残余ネットワークを作ったとき, ソースからシンクへの路(パス)が存在しないものとする. ソースからの路が存在する(枝をたどってソースから到達可能な)頂点の集合をA，それ以外の頂点の集合をBとおく.

［1-1］(A,B)はカットである(つまり, AとBは共通部分をもたず, ソースはAに含まれ, シンクはBに含まれる)ことを証明せよ.

［1-2］残余ネットワークにおいて, 頂点集合AからBに向かう枝(i,j)（つまり, $i \in A, j \in B$を満たす枝)が存在しないことを証明せよ.

［1-3］ 問い[1-2]の結果を使って, 以下を証明せよ：
元のネットワークの各枝(i,j)に対して， $i \in A,\ j \in B$を満たすならば$x_{ij} = u_{ij}$が成り立ち，
$i \in B, j \in A$を満たすならば$x_{ij} = 0$が成り立つ.

［1-4］フローx_{ij} $((i,j) \in E)$ とカット (A,B) に対し,

$$\sum\{x_{ij} \mid \text{枝}(i,j)\text{は} i \in A, j \in B \text{ を満たす}\} - \sum\{x_{ij} \mid \text{枝}(i,j)\text{は } i \in B, j \in A \text{ を満たす}\} = f$$

が成り立つことが知られている. ここで, fはフローの総流量を表す. この式と問い[1-3]の結果を使って, カット(A,B)の容量$C(A,B)$とフローの総流量fが等しいことを証明せよ.

（2）下記の差制約系の解の有無を, 最短路問題に帰着して判定したい：

$p_2 - p_4 \le 1,\ \ p_3 - p_4 \le -1,\ \ \ p_3 - p_2 \le -3,$
$p_1 - p_2 \le -2,\ p_1 - p_3 \le 4,\ \ p_3 - p_1 \le 6$

［2-1］上記の差制約系を最短路問題に帰着するときに使うグラフを書け. その際, 始点, および各枝の長さを書くこと.

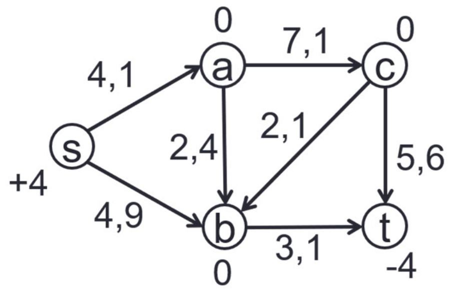
［2-2］問い[2-1]で得られた最短路問題に対し, ベルマン・フォードのアルゴリズムを適用せよ. 計算の過程で得られる数値$d_k(v)$の表(のみ)を書けばよい.

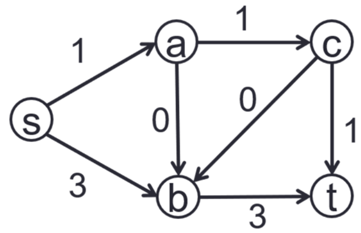
［2-3］問い[2-2]の結果をふまえて, 上記の差制約系に解がするか否かを, その理由と共に答えよ. さらに, 解が存在する場合は, そのような解を一つ答えよ.
一方, 解が存在しない場合は, 矛盾する(必要最小限の)不等式を列挙せよ.

問 2

右上図のグラフにおける最小費用流問題を考える. 各枝に付随する数字のうち, 左側は枝の容量, 右側は枝の費用を表す. 各頂点に付随する数字は, その頂点における需要供給量を表す.

また, この問題の初期フローとして, 右下図のフローを考える.





(1)　初期フローが費用最小か否かを, ポテンシャルを用いて判定したい. このフローに対するポテンシャルの条件を, 不等式・等式の形で(具体的に)すべて書け.

(2)　小問(1)の等式・不等式系の解の存在判定を, 最短路問題に帰着することを考える. その際に使うグラフを書け. その際, 始点, 各枝の長さを明記すること. なお, 得られたグラフの最短路を求める必要はない.

(3)　小問(1)の等式・不等式系の解が存在する場合は, そのような解を一つ求めよ(答えのみ書けば良い).
一方, 解が存在しない場合は, 矛盾する(必要最小限の)等式・不等式を列挙して, 解が存在しない理由を説明せよ.

(4)　この最小費用流問題の最小費用フローを, 負閉路消去アルゴリズムを用いて計算せよ. ただし, 上記の初期フローを使うこと. 解答の際は, 各反復におけるフローを書けば良い. 残余ネットワークは書かなくてもよい.

問３

（1）f は n 変数の凸関数とし，$x^* \in \mathbb{R}^n$ は f の極小解とする. 任意のベクトル $y \in \mathbb{R}^n$ に対し，不等式 $f(y) \geq f(x^*)$ が成り立つことを証明したい.

［1-1］x^* が f の極小解であることの定義を書け. その際, ベクトルに対するユークリッド距離を用いること. なお, ベクトル x, y のユークリッド距離は $\|x - y\|$ と書く.

［1-2］（講義で説明した）凸関数の定義を用いて, 以下の不等式★を証明せよ：

$0 < t < 1$ なる任意の実数tに対して，

$$t\big[f(y) - f\big((1-t)x^* + ty\big)\big] \geq (1-t)\big[f\big((1-t)x^* + ty\big) - f(x^*)\big] \quad ★$$

［1-3］$0 < t < 1$ の条件の下で，t が十分 0 に近いならば，$f\big((1-t)x^* + ty\big) - f(x^*) \geq 0$が成り立つ. このことを, 問い[1-1]の結果を用いて証明せよ.
（ヒント：tを十分 0 に近づけると, ベクトル $(1-t)x^* + ty$ とx^*のユークリッド距離は0に近づく）

［1-4］上記の不等式★において，t が十分 0 に近いならば，$f(y) - f\big((1-t)x^* + ty\big) \geq 0$が成り立つ. このことを, 不等式★と問い[1-3]の結果を用いて証明せよ.

なお, 問い[1-3]と[1-4]の結果より, 不等式 $f(y) \geq f(x^*)$ が得られる.

（2）f は 2 変数の非線形関数であり, 2階微分可能とする. また, ベクトル (x_1, x_2) はfの極小解とする.

［2-1］ベクトル(x_1, x_2)におけるfの勾配ベクトルが, 実数 a, b を用いて $(a + b, 2a - b)$ と与えられるとする. このとき, 実数 a, b の取り得る範囲を示せ. 計算の過程も書くこと.

［2-2］ベクトル(x_1, x_2)におけるfのヘッセ行列は, 実数 c, d を用いて

$$\begin{bmatrix} c & d \\ d & d \end{bmatrix}$$

と与えられるとする. このとき, 実数 c, d の取り得る範囲を示せ. 計算の過程も書くこと.
ただし, 実数 c, d がどのような値を取る場合でも, ベクトル (x_1, x_2) は停留点であるものとする.

注意：上記の問題では, 縦ベクトルと横ベクトルを同一視する.

問 4：

（1）制約つき非線形計画問題

$$\text{最小化} \quad x^2 + 2(y-1)^2 \qquad \text{条件} \quad -x \leq y \leq x$$

の最適解を求めたい．この問題に対しては，ベクトル(x, y)が（大域的）最適解であることと，KKT 条件を満たすことが必要十分である．

［1-1］この問題に対する KKT 条件を具体的に書け．

［1-2］KKT 条件を用いて，この問題の最適解を**全て**求めよ．**計算の過程も書くこと．**

（2）関数 $f(x, y) = x^3 + y^2 - xy$の制約なし最小化問題を，最急降下法およびニュートン法で解きたい．

［2-1］初期点を $(x, y) = (1,3)$ として最急降下法を適用したときの次の点を計算したい．次の点へ**移動するときの方向，ステップサイズ，および次の点**を求めよ．途中の計算過程も書くこと．なお，ステップサイズは直線探索問題を正確に解いて求めるものとする．

［2-2］初期点を$(x, y) = (1,3)$ としてニュートン法を適用したときの**次の点**を計算せよ．途中の計算過程も書くこと．（ヒント：正則行列$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$の逆行列は $\frac{1}{ac-b^2}\begin{bmatrix} c & -b \\ -b & a \end{bmatrix}$）