※問題は問1から問4まであります.
※解答用紙全てに名前を書いてください. 学籍番号は 1 枚目のみで構いません.
※A4 用紙を持ち込んでいる場合には, 名前と学籍番号を書いて必ず提出すること.

以下と裏面は計算用紙に使ってください

2023 年度 オペレーションズ・リサーチ基礎 中間試験問題［50 点満点］

2024 年 1 月 11 日(木) 13 時 30 分～15 時 00 分（90 分）

問 1

(1)次の問題を数理最適化問題として定式化せよ. さらに, 定式化で用いた変数の意味と各制約条件の意味を簡単に説明すること. なお, 最適解を求める必要はない.

ある都市において, 新たに建設予定の公共施設について, その建設位置を決定したい. その位置は二次元平面上の点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ により表現するものとする. この都市は n 箇所の行政区から構成されており, 各行政区の中心 (a_i, b_i) $(i = 1,2, \ldots, n)$ からの(ユークリッド)距離を**二乗**したものの和をできる限り小さくするような位置に, 公共施設を建設したい. ただし, その都市の中央駅から公共施設への距離は 2km **以下**とする. 中央駅の位置は(s, t)である. また, その都市の地点(p, q)に存在する発電所から公共施設への距離は10km **以上**とする. なお, 2 点$(a, b), (c, d)$のユークリッド距離は$\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$で定義される.

(2) 以下の 0-1 ナップサック問題を考える.

$$\text{最大化: } 102x_1 + 100x_2 + 100x_3$$
$$\text{条件: } 101x_1 + 100x_2 + 100x_3 \leq 200$$
$$x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}$$

[2-1] この問題の最適解と最適値を求めよ. 結果のみ書けば良い.

[2-2] この問題に対し, 改良版貪欲アルゴリズムを用いて得られる近似解を求め, その目的関数値と近似比を計算せよ. 近似解を求める際の途中の計算についても記述すること.

問 2

不等式標準形で与えられる線形計画問題(P)およびその双対問題(D)について, 下記の問題に答えよ. なお, (1), (2), (3)については, 答えのみ書けば良い.

(1) 不等式標準形の線形計画問題(P)の一般形を書け. また, その双対問題(D)を書け.

(2) 線形計画問題(P)と(D)に対する弱双対定理の主張を書け.

(3) 小問(2)の弱双対定理を用いて, 以下の主張が成り立つことを証明せよ:

「主問題(P)の実行可能解 x と双対問題(D)の実行可能解 y に対し, それらの目的関数値が一致するならば, y は双対問題(D)の最適解である. 」

(4) 線形計画問題(P), (D)ともに,

(a)実行可能であり最適解をもつ, (b)実行可能であり非有界である, (c)実行不可能

のいずれか一つに該当することが知られている.

[4-1] (P)および(D)の組合せとして, ともに(c)を満たす場合が存在する. これ以外に起こりうる組合せ(例:(P)が(b)を満たし, (D)が(a)を満たす, など)をすべて列挙せよ.

[4-2] 上記の問い[1-2]で挙げた組合せすべてに対して, そのような(P)と(D)の例を具体的に示せ. ただし, (P)の変数は1つ, 制約も1つ(変数の非負制約は含まない)とすること(ともに(c)を満たす場合については例を挙げる必要は無い).

問３

（1）右の線形計画問題(P)が実行可能解をもつか否かを，単体法の一段階目を用いて判定したい．

(P1) 最小化 $2x_1 + 4x_2$

条件

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\geq 3 \\
-x_1 - 2x_2 &\geq 4 \\
-2x_1 + x_2 &\geq 1 \\
x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

[1-1] 問題(P)に対する補助問題を書け．答えのみ書けば良い．

[1-2] 補助問題に対応する初期辞書を書け．答えのみ書けば良い．

[1-3] 問い[1-2]で得られた初期辞書に対して単体法を適用し，問題(P1)が実行可能か否かを判定せよ．単体法の各反復における辞書を明記すること．

（2）右の実行可能辞書に対し，単体法を適用して最適解を求めたい．この辞書にピボット演算を1回適用して得られる辞書，およびその際に**入れ替えた基底変数・非基底変数**を書け．ただし，**最小添字規則を使う**こと．なお，新しい辞書を導出する過程を説明する必要はない．

$$
\begin{aligned}
z &= 3 + x_1 - 2x_3 - x_4 \\
x_2 &= 0 - x_1 + x_3 + x_4 \\
x_5 &= 0 - 2x_1 - x_3 + x_4 \\
x_6 &= 0 + x_1 - x_3 - x_4
\end{aligned}
$$

（3）右の線形計画問題(P2)について考える．

(P2) 最小化 $x_1 + 4x_2$

条件

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\geq 5 \\
x_1 + x_2 &\geq 4 \\
2x_1 + x_2 &\geq 5 \\
x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

[3-1] 問題(P2)の双対問題(D2)を書け．答えのみ書けば良い．

[3-2] 問題(P2)の解(x_1, x_2)と双対問題(D2)の解 (y_1, y_2, y_3) に対する**相補性条件**を書け．答えのみ書けば良い．

[3-3] 問題(P2)の実行可能解$(x_1, x_2) = (3,1)$に対し，相補性条件を満たす双対問題(D2)の**実行可能解** (y_1, y_2, y_3) をすべて求めよ．**計算の過程も書け．**

[3-4] 問い[3-3]の結果に基づいて，問題(P2)の実行可能解$(x_1, x_2) = (3,1)$が最適解か否かを判定せよ．

問 4：

あるナップサック問題を，分枝限定法を用いて解いている過程で現れた，右の部分問題(KP)について考える．

(KP) 最大化 $7x_1 + 9x_2 + 8x_3$

条件 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5$

$x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}$

(1) 部分問題(KP)の緩和問題(連続ナップサック問題)の最適解と最適値(最適解の目的関数値)を求めよ．答えのみ書けば良い．

(2) 現時点で**目的関数値が 16 の暫定解が得られている**ものとする．小問(1)の結果に基づき，部分問題(KP)に対して限定操作が適用可能か否かについて，「はい」または「いいえ」の形で答えよ．また，その**理由を説明**せよ．

(3) 部分問題(KP)に対して，$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$ は妥当不等式である．(KP)にこの不等式を追加したときの緩和問題(各変数の条件を「0 以上 1 以下」に置き換えた問題)の最適解と最適値を求めよ．答えのみ書けば良い．

(4) 現時点で**目的関数値が 16 の暫定解が得られている**ものとする．小問(3)の結果に基づき，部分問題(KP)に対して限定操作が適用可能か否かについて，「はい」または「いいえ」の形で答えよ．また，その**理由を説明**せよ．